Math. P. 251 e

Kausler

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Logarithmen

und ihrem Gebrauch

vollständig und deutlich entwickelt, und du[rch]
viele Beispiele erläutert

von

C. F. Kausler,

Königlich = Württembergischem Hofrath und pensionirtem
Russisch = Kaiserlichen Akademie der Wissenscha[ften]
zu St. Petersburg.

Tübingen,
in der J. G. Cotta'schen Buchhand[lung]
1808.

Wd
88. D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Ein eigenes Werk über die Logarithme[n]
chem diese wichtige Lehre von ihrem ersten
an systematisch und ausführlicher als in de[n]
lichen Kompendien vorgetragen wird, s[c]
ganz überflüssiges Unternehmen; besonder[s]
mit der gehörigen Vollständigkeit noch de[n]
verbindet, daß es nicht allzuweitläufig ist.
fühlte ich diß Bedürfniß bei einem etlich [...]
zigjährigen Unterricht, und bei fähigen Kö[...]
nichts bessers verlangten, als das ganze
Brauchbarkeit der Logarithmen, dabei abe[r]
theoretische Seite ganz zu überschauen. V[...]
es dem Mangel eines Werks dieser Art zuz[...]
daß man, auch bei gewöhnlichen Beispiel[...]
meinen Rechenkunst, insoferne sie nämlich [...]
Multiplikationen und Divisionen erfordern[...]
Logarithmen so wenig Gebrauch macht, un[d]
sie als eine Erfindung betrachtet, die nur [...]
gebra, Trigonometrie, Astronomie, höhe[r]

zen sehen, wo das Beyspiel vom Erfinder des
spiels, das gerade am wenigsten beweißt, zur
wiederholt wird. Höchstens bringt man au
einige der allerleichtesten Fälle von der Bere
der Zinseszinse vor.

Da alle mathematische Lehren in ei
hängen, und gleichsam ein Ganzes bilden,
auch die Lehre von den Logarithmen, so
sie hier vorgetragen, ihre bestimmte Stelle.
setze nemlich voraus, daß derjenige, der
studiren will, die arithmetischen und geome
Progressionen absolvirt, auch die ersten A
gründe der Buchstabenrechnung, die Aus
der Wurzeln, und die Auflösung der ei
Gleichungen wohl inne habe. Ist er no
dem Binomischen Lehrsatze und der Lehre v
Reihen etwas bekannt, desto besser. Die
rithmen durch Reihen auszudrücken mußte
doch lehren. Es ist aber, wie ich hoffe,
deutlich, als nur immer möglich, vorgetrage
es sind auch wirklich keine weitere Vorken
dabey nöthig. Sollte übrigens dieser oder
irgendwo einigen Anstand finden, so wird e
Zweifel einen Lehrer oder Freund in der

chach=
Eckel
noch
nung

ander
hat
ie ich
Ich
e erst
ischen
angs=
ehung
fachen
h mit
n den
Loga=
ich ja
lles so
, und
ntnisse
jener
r ohne
Nähe

metischen und geometrischen Progressionen
det. Auf diese Art wird alles lichtvoll
dem andern Wege, wenn man nemlich
rithmen als Exponenten ansiehet, Lücken
deulichkeiten für Anfänger mitunterlauf
sogar, so lange nur nicht dem Begriff
leiteten geometrischen und arithmetischen
nen aus einem ursprünglich angenomme
stem so entwickelt, wie es §. 11. seqq.
ist, so hat auch die Vorstellung der Log
insofern sie Glieder einer arithmetischen
sion sind, immer noch etwas Mangelhaft

Der wichtige Satz, daß der Logari
Produkts eine Summe der Logarithmen d
ren sey, um der sich die ganze Lehre der Log
mit allen ihren Anwendungen, als um e
drehet, ist auf dreierlei Art nach den F
der Studirenden, diesem auf die eine, j
die andere Weise mehr einleuchtend, str
wiesen worden, als ich diesen Beweiß
vorgetragen sah. Den ersteren habe ich
gen Abänderungen aus Bézont Cours
thematiques genommen; der zweite ist m
der dritte ist der gewöhnliche, aber eben
dem, was ihn mangelhaft machte, gereini

lehrt. Dabei setze ich voraus, daß man f
Werk bei Handen haben muß:

"Georg Vega's logarithmisch-trigon
"sches Handbuch" ꝛc. Leipzig, in der
mannischen Buchhandlung.

Mehr Theorie, z. B. von den Logarithme
ginärer Größen anzubringen, schien mir ni
her zu gehören. Wer diese und dergleich
terien ausführlich studiren will, der hat
reits die nöthigen Vorkenntnisse erhalten, u
sich nun, mit denselben ausgerüstet, um
Abhandlungen umsehen.

Den vorzüglichsten Stoff zur Anwendu
ser Lehre und Behandlung der Logarithm
mir die so wichtige Berechnung der Ze
dar. Dabei habe ich zwar Tetens Einl
zur Berechnung der Leibrenten un
wartschaften ꝛc. zum Grund gelegt: a
bei manches Eigene anzubringen Gelegenh
funden, das der Kenner zu würdigen wisse

Der lezte Abschnitt zu den logarith
Differentialien ist eben nicht wesentlich, be

alle die verschiedenen, zum Theil äusserst sin
Methoden, die Logarithmen einer Zahl zu
nen, hätte vortragen sollen. Ein so weitl
Werk, das dann nicht mehr für Anfänger
konnte, wollte ich nicht schreiben: so verd
es von einer andern Seite betrachtet
wäre.

Nun ein Paar Worte über die G
der Logarithmen. Der Erfinder der Loga
ist ein schottischer Edelmann, Iohann N
oder Napier, von Merchiston, bei Edinb
bohren 1550, und gestorben 1618, der s
findung kurz vor seinem Tode, im Jahre
im folgenden Werk bekannt machte: "
Logarithmorum Canonis descriptio,
usus in utraque Trigonometria, ut et
omni Logistica mathematica, amplissimi
limi et expeditissimi explicatio. Auth
inventore Ioanne Nepero, Barone
stonii etc. Die Veranlassung zu dieser E
gab ihm der Gedanke, ein Erleichterun
bei dem verdrieslichen Multipliciren und
ren großer Zahlen, die besonders in trigo
schen Rechnungen vorkommen, wie auch b
ziehung der Wurzeln auszufinden. Die

Nach ihm und auf sein Anrathen ga
rich Briggs, geboren 1560, zu Warle
in der Grafschaft York, und gestorben 1
Oxfort, schon im Jahr 1618 die nach d
zu Tage noch angenommenen Grundlage
1 = 0, und Logar. 10 = 1, auf 8 De
fern berechneten Logarithmen der natürlich
len von 1 — 1000 heraus. Sechs Ja
nach erschien dessen Arithmetica Logari
worinn er die Logarithmen der natürlichen
von 1 bis 20000, und von 90000 bis
auf 14 Decimalstellen berechnet, mittheilte
er, nach seinem Vorhaben, die Lücke der
den 70000 Zahlen ergänzt hatte, war d
dem holländischen Buchhändler Adrian V
ausgeführt, der die Logarithmen dieser
jedoch nur auf 10 Decimalstellen berechnet,
von Brigg's berechnete, und ebenfalls auf
cimalstellen beschränkte, anschloß, und sei
unter dem Titel: Arithmetica logarithmic
logarithmorum chiliades centum — un
canone triangulorum. — Editio secunda,
per Adrianum Vlacq, Gudanum MDCX

Nach diesem erschienen, zuerst im Jahr 1706, die Schewinischen Tafeln, wovon die correcteste die durch William Gardiner 1742 besorgte Auflage ist, und welche die Logarithmen aller natürlichen Zahlen, von 1 — 101000 auf 7 Decimalziffern berechnet, enthält.

Unter den neuesten zeichnet sich vor allen die oben angeführte von Vega, und dann folgende von eben diesem Schriftsteller aus:

Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln, nach Adrian Vlacq's Arithmetica logarithmica, et Trigonometria artificialis, verbessert und geordnet, und vermehrt von Georg Vega, Major und Professor der Mathematik beim K. K. Bombardiercorps. Leipzig, 1764. Fol. In diesem Werk sind S. 3 - 297 die Briggischen Logarithmen der Zahlen von 1 - 101000 in 10 Decimalziffern angegeben.

Endlich führen wir noch als vorzüglich folgende an: Tables portatives de Logarithmes, publiées à Londres par Gardiner, augmentées et perfectionnées dans leur disposition etc., par François Callet, Edition stereotype. Paris 1795. in gr. 8. enthaltend die Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 - 108000.

Mehrere andere Tafeln, worunter besonders solche, in denen die Logarithmen bis auf 20, ja sogar 61 Decimalstellen berechnet sind, führt Prof. Pfleiderer, in seiner ebenen Trigonometrie an, aus welcher auch die hier mitgetheilten historischen Notizen größtentheils genommen sind.

Die Lehre

von den

Logarithmen.

§. 1. Definition.

Ein Logarithme ist ein Glied einer arithmetischen [Progres-]
sion, in sofern es einem Gliede einer geometrischen c[orrespon-]
dirend gedacht wird.

§. 2. Erläuterung.

Wenn also

A, B, C, D, E ꝛc.

Glieder einer geometrischen Progression, und

a, b, c, d, e ꝛc.

Glieder einer arithmetischen Progression vorstellen; [so ist a]
der Logarithme von A, b der von B, c der von C u[nd s. f.]

§. 3. Definition.

Die beiden in Verbindung gedachten Pro[gressionen]
heißen ein **logarithmisches System**. Ein lo[garithmi-]
sches System ist also eine Verbindung einer geometri[schen und]
arithmetischen Progression, insofern sie sich Glied v[or Glied]
correspondirend gedacht werden.

§. 4. Zusatz.

Da unter jede beliebige geometrische Progressio[n jede be-]
liebige arithmetische gesetzt werden kann; so sind unz[ählig]
logarithmische Systeme möglich, und jede Zahl, in[sofern sie]
ein Glied einer geometrischen Progression ist, kann [unzählig]
viele Logarithmen haben; so wie hinwiederum ein [und]
derselbe Logarithme unzählig vielen Zahlen zugehören [kann.]

Wege zueilt, wenn man die geometrische Progre
und die arithmetische mit 0 anfangen läßt; das
der Logarithme von 1 ist.

§. 6. Zusatz.

Die Eigenschaften und der Gebrauch der
müssen nothwendig aus den Eigenschaften der beid
Systeme verbundenen Progressionen fließen. U
leicht und deutlich entwickeln zu können, ist es
kürzlich zu betrachten.

A. Von den geometrischen Progress

§. 7. Satz.

Jedes Glied einer geometrischen Progressio
D, E rc. ist mittlere geometrische Proportionalgr
seinen beiden Nebengliedern.

Beweiß. Dieß folgt aus der Natur d
schen Progression. Denn es ist: A : B = B :
ist B mittlere geometrische Proportionalgrösse zwisch
Ferner, da B : C = C : D, so ist auch C mittlere
Proportionalgrösse zwischen B und D, und sof
übrigen.

§. 8. Satz.

Wenn in einer Reihe von Zahlen A, B,
jede derselben mittlere geometrische Proportionalgr
ihren Nebenzahlen ist; so bilden diese Zahlen eine
Progression.

geometrische Proportionalzahl zwischen ihren Neben
eine geometrische Progression.

§. 9. Satz.

Wenn man zwischen je zweien unmittelbar au
folgenden Gliedern einer geometrischen Progression
D, E ꝛc. mittlere geometrische Proportionalzahlen
lich A' zwischen A und B, B' zwischen B und C
bilden diese mit jenen in eine Reihe A, A', B, B', C
vereiniget, ebenfalls eine geometrische Progression.

Beweiß. Es ist $A : A' = A' : B$,
annimmt, A' sey mittlere geometrische Proportiona
schen A und B. Aus ähnlichem Grunde haben w
BC. Folglich ist $A' A' B' B'$ oder $(A'B')^2 =$
Da nun, nach der Voraussetzung, A, B, C, D,
der einer geometrischen Progression sind, so ist AC
mithin auch $(A'B')^2 = B^4$, und $A'B' = B^2$
ist $A' : B = B : B'$. Aber $A : A' = A' :$
$A : A' = A' : B = B : B'$ u. s. w. Folglich s
B, B', C, C' u. s. w. in geometrischer Progression

§. 10. Zusatz.

Es läßt sich also aus einer geometrischen P
durch Einschaltung von mittleren Proportionalgröße
je zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder
eine zweite, und aus dieser auf gleiche Weise eine dri
und sofort ins Unendliche ableiten.

Proportionalgröße zwischen jenen beiden Gliedern

§. 11. Definition.

Jede bei einem logarithmischen System zum
legte geometrische Progression nennen wir in Zukun
sprüngliche; jede durch Einschaltung von mitl
trischen Proportionalgrößen von ihr abstammend
abgeleitete Progression.

Man habe z. B. die geometrische Progres
16, 64, 256, 1024 rc. so ist diese die ursprüng

Nun suche man zwischen je zweien Glieder
mittlere geometrische Proportionalzahlen, welch
vorhergehenden §. seyn werden:

$\sqrt{1 \cdot 4} = 2,$
$\sqrt{4 \cdot 16} = 8,$
$\sqrt{16 \cdot 64} = 32,$ u. s. w. so ist
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 rc. die erste
Progression.

Die mittleren geometrischen Proportionalzahl
1 und 2, 2 und 4, 4 und 8, 8 und 16 u. s. w
gende:

$\sqrt{1 \cdot 2} = 1,414....$
$\sqrt{2 \cdot 4} = 2,828....$
$\sqrt{4 \cdot 8} = 5,656....$
$\sqrt{8 \cdot 16} = 11,312....$ u. s. w.

wissen geometrischen Progression angesehen werde
einer beliebig angenommenen ursprünglichen Progre
ver Zahlen ableitbar ist.

Erklärung. Es sey a eine positive ganz
A, B, C, D, E 2c. eine beliebige ursprüngliche
Progression, so behaupte ich, es lasse sich aus diese
leitete
A, A′, A″... B, B′, B″... C, C′, C″... D, D
angeben, von welchen a ein Glied ist.

Beweiß. Die Zahl a muß nothwendig ent
ein Glied der ursprünglichen Progression A, B,
oder zwischen zwei derselben, z. B. zwischen B un
Im ersten Fall ist der Satz erwiesen. Im ander
B und C die ersten Gränzen von a. Indem ma
der ursprünglichen Progression die erste abgeleitete A
C, C′, D 2c. bildet, entstehen aus m Gliedern
2 m — 1 Glieder der abgeleiteten, und a das z
Gränzen B und C lag, die wir als endliche Größen
ist nun entweder gleich B′, oder es liegt zwischen
oder zwischen B′ und C. Da nun B′ (wir nehm
an die ursprüngliche Progression immer steigend an,
so sind die Gränzen B und B′ näher beisammen, al
Eben so sind auch B′ und C näher beisammen, als
Das heißt: Wenn aus der ursprünglichen Progr
abgeleitete gebildet wird, so ist a entweder ein Glie
geleiteten, oder es liegt zwischen Gränzen, die nä

men sind, als die ersten oder oder äussersten B und C. Im ersten Fall ist der Saz abermal erwiesen. Im andern ist der Unterschied von eben diesem a und seinen neuen Gränzen kleiner, als der Unterschied von eben diesem a und seinen äussersten Gränzen. Es können nun aber aus der ursprünglichen Progression so viel abgeleitete gebildet werden, als man will. Mithin kommt man endlich, da der erste Unterschied von a und seinen äussersten Gränzen endlich ist, und bei jeder neuen Progression sich um eine endliche Grösse vermindert, auf eine solche abgeleitete Progression, in welcher entweder ein Glied wirklich gleich a ist, oder man gelangt zu solchen Gränzen, deren Unterschied von a so klein ist, als man will, das ist: so nahe an Null ist, als man will, und welche Gränzen man also anstatt a selbst annehmen kann. Folglich läßt sich jede positive ganze Zahl als ein Glied einer geometrischen Progression ansehen, die von jeder beliebigen ursprünglichen abgeleitet werden kann.

§. 13. Zusaz.

Wenn diejenige abgeleitete Progression, von welcher a als ein Glied betrachtet werden kann, die m^{te} ist, und man aus derselben die $m+1$, $m+2$, $m+3$ rc. bildet, so ist a um so mehr auch ein Glied von diesen: denn der Unterschied von a und seinen Gränzen in einer von diesen Progressionen wird immer kleiner, je weiter die abgeleitete von der ursprünglichen entfernt ist; um so wichtiger können also jene Gränzen anstatt a gesezt werden.

§. 14. Zusaz.

Die Anzahl der für ein gewisses a zu bildenden abgeleiteten Progressionen hängt von zweierlei Umständen ab. Einmal von der Natur der Zahl a selbst, und dann auch noch von dem Grade der Annäherung der lezten Gränzen, die man mit a gleich annimmt. Gemeiniglich siehet man Zahlen, die ausser

den Gränzen auch noch in den 7 ersten Decimalstellen mit einander übereinkommen, als gleich an. Findet sich aber diese Uebereinstimmung bei einer noch größeren Anzahl von Decimalstellen, so ist die Idendität jener Zahlen noch richtiger.

§. 15. Satz.

Aus jeder beliebigen ursprünglichen geometrischen Progression läßt sich eine abgeleitete bilden, von welcher alle ganze positive Zahlen Glieder sind.

Beweiß. Nach dem vorhergehenden Satze läßt sich von jeder beliebigen ursprünglichen geometrischen Progression eine solche ableiten, von der eine gewisse gegebene Zahl a ein Glied ist. Nach dem Zusatz §. 14. ist bei einerlei Grad von Annäherung, oder bei einer gleichen Anzahl von Decimalstellen, die Anzahl dieser abgeleiteten Progressionen nach den verschiedenen Zahlen a verschieden, und nach dem Zusatz §. 13. ist das a, das ein Glied einer der abgeleiteten Progressionen ist, um so mehr auch ein Glied aller folgenden. Wenn wir nun dieses insbesondere auf diejenige Zahl a anwenden, die, um mit ihren Gränzen z. B. auf 7 Decimalstellen übereinzukommen, am meisten abgeleitete Progressionen, etwa n an der Zahl, erfordert; so wird demnach die n^{te} abgeleitete Progression diejenige seyn, von welcher alle andere Zahlen Glieder sind. Denn es ist nothwendig jede andere von diesem a verschiedene Zahl, nach dem vorhergehenden Satze, ein Glied von einer der von der ursprünglichen Progression abgeleiteten Progressionen, und zwar, nach der Voraussetzung, von einer der n — 1 ersten, wenn sie es nicht von der n^{ten} selbst ist; daher ist sie auch, nach Zusatz §. 13., ein Glied von allen folgenden, demnach auch von der n^{ten} abgeleiteten Progression. Folglich sind alle Zahlen Glieder dieser n^{ten} abgeleiteten Progression, und um so mehr also von allen folgenden, die man sich bis ins Unendliche fortgesetzt denken kann.

Es giebt also für jede beliebige ursprüngliche geometrische Progression eine (und mithin auch unzählige) abgeleitete, von welcher oder welchen alle mögliche ganze positive Zahlen als Glieder angesehen werden können.

B. Von den arithmetischen Progressionen.

§. 16. Satz.

Jedes Glied einer arithmetischen Progression a, b, c, d 2c. ist mittlere arithmetische Proportionalgröße zwischen seinen beiden Nebengliedern.

Beweiß. Diß folgt aus der Natur der arithmetischen Progression; denn nach dieser ist: $b - a = c - b$, also auch $b = \frac{a + c}{2}$, und mithin ist diese Größe mittlere arithmetische Proportionalgröße zwischen a und c. Auf ähnliche Art beweißt man den Satz auch von c, d, e 2c.

§. 17. Satz.

Wenn in einer Reihe von Zahlen jede derselben mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen ihren beiden Nebengliedern ist, so bilden diese Zahlen eine arithmetische Progression.

Beweiß. Die Reihe von Zahlen sey a, b, c, d, e 2c. von welchen angenommen wird, daß $b = \frac{a + c}{2}$, $c = \frac{b + d}{2}$, $d = \frac{c + e}{2}$, 2c. so soll bewiesen werden, daß a, b, c, d 2c. eine arithmetische Progression bilden; dieß geschieht nun also: da $b = \frac{a + c}{2}$, so ist $2b = a + c$, und $b - a = c - b$. Da ferner $c = \frac{b + d}{2}$, so ist eben so

$2c = b + d$, und $c - b = d - c$; folglich ist auch $b - a = c - b = d - c$ u. s. w. Also stehen die Größen a, b, c, d ꝛc. unter der angenommenen Voraussetzung in arithmetischer Progression.

§. 18. Satz.

Wenn eine Reihe von Zahlen a, b, c, d ꝛc. in arithmetischer Progression stehen, und man zwischen je zwei Glieder derselben mittlere arithmetische Proportionalzahlen a' b' ꝛc. einschaltet; so ist auch die abgeleitete Reihe a, a', b, b', c, c' ꝛc. eine arithmetische Progression.

Beweiß. Da a' mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen a und b ist, so haben wir $a' = \frac{a + b}{2}$, woraus $2a' = a + b$, und $a' - a = b - a'$ folgt. Eben so ist auch, aus ähnlichem Grunde, $b' - b = c - b'$. Nun ist aber auch a, b, c, d ꝛc. eine arithmetische Progression; daher muß $b - a = c - b$ seyn, und da $a = 2a' - b$, und $b = 2b' - c$, so folgt daß $b - a = 2b' + b - 2a' - c$ sey. So eben hatten wir aber auch $b - a = c - b$; folglich ist $2b' + b - 2a' - c = c - b$, mithin $b' - a' = c - b$; daher endlich $b - a' = c - b'$. Da nun auch $b - a' = a' - a$, und $c - b' = b' - b$, so haben wir $a' - a = b - a' = b' - b = c - b'$, und demnach sind die Zahlen a, a', b, b', c und, wenn dieselben Schlüsse weiter ausgedehnt werden, auch die übrigen Glieder der Reihe $a, a', b, b', c, c', d, d'$ ꝛc. in arithmetischer Progression.

Wenn man also zwischen je zwei Glieder einer arithmetischen Progression mittlere arithmetische Proportionalzahlen einschaltet, so ist die dadurch entstehende Reihe ebenfalls eine arithmetische Progression.

§. 19. Zusatz.

Es lassen sich demnach aus einer ursprünglichen arithmetischen Progression unzählig viele abgeleitete bilden.

C. Verbindung von geometrischen und arithmetischen Progressionen.

§. 20.

Aus jedem ursprünglich angenommenen logarithmischen System bildet sich also, durch Einschaltung von mittleren geometrischen und arithmetischen Proportionalzahlen zwischen je zwei Glieder einer jeden Reihe ein abgeleitetes, und aus diesem auf dieselbe Weise wieder eines, und sofort, bis man endlich (§. 15.) auf ein solches kommt, oder kommen könnte, von welchem alle positive ganze Zahlen als Glieder der ihm zugehörigen geometrischen Progression angesehen werden können. Die arithmetische Progression dieses Systems enthält dann die Logarithmen jener Zahlen. Ein Logarithme einer Zahl ist also nichts anders, als dasjenige Glied einer von einem ursprünglichen beliebigen System durch Einschaltung mittlerer arithmetischer Prop. Zahlen abgeleiteten Progression, welches dem in der ebensovielten abgeleiteten geometrischen Progression mit der gegebenen Zahl als gleich angesehenen Gliede correspondirt. Aus dieser Darstellung erhellet, daß für jedes ursprüngliche logarithmische System eine jede Zahl einen, und **nur einen** Logarithmen habe; ferner, daß, da bei weitem die meisten ganzen Zahlen nur näherungsweise als Glieder der verschiedenen abgeleiteten geometrischen Progressionen angesehen werden können, sie auch nur näherungsweise zu den ihnen correspondirenden Logarithmen passen. In diesem Sinne sagt man, daß bei jedem angenommenem Systeme nur wenige Logarithmen ganz genau, und bei weitem die meisten nur näherungs-

weise wahr seyen: denn Logarithmen, als mittlere arithmetische Proportionalgrößen von rationalen Zahlen, sind an und für sich selbst immer rational, passen aber auf irrationale Glieder der correspondirenden geometrischen Progression: und mithin nur uneigentlich auf die statt dieser angenommenen ganzen Zahlen.

Die Logarithmen der Brüche und Irrationalzahlen lassen sich aus denen der ganzen Zahlen ableiten, und werden weiter unten abgehandelt werden. Uebrigens können die Sätze §. 12 und 15 mit ihren Folgen auch auf Brüche und Irrationalzahlen angewendet werden, indem das, was daselbst von ganzen Zahlen erwiesen worden ist, vollkommen auf jede Gattung von Brüchen paßt, und mithin auch von diesen und Irrationalzahlen gilt.

§. 21. Aufgabe.

Man sucht für ein gewisses angenommenes ursprüngliches logarithmisches System:

A, B, C, D, E, F ꝛc.
a, b, c, d, e, f ꝛc.

den Logarithmen einer bestimmten, positiven, nicht in der Reihe A, B, C ꝛc. begriffenen Zahl α.

Auflösung.

1) Man bestimme in der geometrischen Progression A, B, C ꝛc. die Gränzen, zwischen welche die gegebene Zahl ꝛc. fällt, sie seyen B und C.

2) Man suche zwischen B und C eine mittlere geometrische Proportionalzahl B′.

3) Man suche zwischen b und c eine mittlere arithmetische Proportionalzahl b′, und denke sich die abgeleiteten vollständigen Progressionen

A, A', B, B', C, C' 2c.

a, a', b, b', c, c' 2c.

ohne daß übrigens A', a', C, c' 2c. auch berechnet werden dürfen: so ist b' der Logarithme von B', und also auch von α, wenn diese Größe mit B' einerlei ist. Ist diß aber nicht der Fall, so bestimme man

4) aufs neue die Gränzen von α in der abgeleiteten Progression A, A', B, B', C 2c. Sie sind nothwendig zwischen B und B', oder zwischen B' und C.

5) Nun suche man zwischen B' und C die mittlere geometrische Proportionalzahl B''.

6) Man suche ferner auch zwischen b' und c die mittlere arithmetische Proportionalzahl b'', und denke sich die zweite abgeleitete vollständige Progression.

A, ⁂ A', ⁂ B, ⁂ B', B'', C 2c.

a, ⁂ a', ⁂ b, ⁂ b', b'', c 2c.

so ist b'' der Logarithme von B'', und mithin auch von α, wenn diese Zahl mit B'' einerlei ist; ist sie es nicht, so bestimme man

7) abermals die neuen Grenzen von α, entweder zwischen zwischen B' und B'', oder zwischen B'' und C u. s. w. so wird man (§. 12) in den geometrischen abgeleiteten Progressionen endlich auf eine solche kommen, in welcher α als mit seinen Gränzen zusammenfallend oder gleich angesehen werden kann. Die correspondirende Zahl der eben so vielten abgeleiteten arithmetischen mit jener ein System bildenden Progression ist dann endlich der gesuchte Logarithme von α.

§. 22. Anmerkung.

Auf diese Art können die Logarithmen für ein gewisses angenommenes System berechnet werden, und sind auch

wirklich anfangs so berechnet worden. In der Folge entdeckte man durch genaue Betrachtung ihrer Eigenschaften leichtere Wege, diesen Zweck zu erreichen, welche weiter unten gleichfalls erklärt werden sollen. Hier genügt es einstweilen, die Möglichkeit der Berechnung für jede positive Zahl überzeugend dargethan zu haben.

D. Von den gewöhnlichen oder briggischen Logarithmen, den aus denselben verfertigten Tabellen, ihrer Einrichtung, und den praktischen Vorschriften zum Aufschlagen der Logarithmen, desgleichen zum Aufsuchen der einem gegebenen Logarithmen zugehörigen Zahl.

§. 23.

Die ganze Lehre von den Logarithmen würde unfruchtbar und unnütz seyn, wenn man nicht Tabellen hätte, durch deren Hülfe man auf eine sehr leichte Art die den Zahlen zugehörigen Logarithmen, und umgekehrt auch die einem bekannten Logarithmen correspondirende Zahl schnell finden kann. Dergleichen Tabellen wurden nun gleich zu Anfang der Erfindung der Logarithmen auf die vorhin bezeichnete Art sehr mühsam berechnet; denn wenn sie sollten brauchbar seyn, so müßten sie für sehr viele und sehr große Zahlen, und für jede derselben auf viele Decimalstellen angegeben werden. Da aber, wenn man alle Zahlen von 1 bis auf einige Millionen mit ihren Logarithmen hätte neben einander schreiben wollen, ein Foliant von ungeheurer Dicke entstanden wäre, so gehörte noch überdieß eine eigne Einrichtung dazu, die größte mögliche Menge von Zahlen, sammt ihren Logarithmen, auf den kleinsten möglichen Raum zu bringen.

Arithmetische Progression: 0, 1, 2, 3

also, daß in geometrischer Progression die Gliede
nach den Potenzen von 10 steigen; in der arithm
von 0 an nach der Ordnung der natürlichen Zahlen

Demnach ist:

0 der Logarithme von 1, oder Log. 1 =
1 der Logarithme von 10, oder Log. 10 =
2 der Logarithme von 100, oder Log. 100 =

und sofort mit den übrigen.

Dieses System wird das gewöhnliche,
briggische genannt. Nach demselben haben a
len zwischen 1 und 10, die erst in den abgeleitete
schen Progressionen zum Vorschein kommen, zu
Zahlen, die zwischen 1 und 0 liegen. Eben so si
rithmen aller zwischen 10 und 100, mithin aller
Zahlen zwischen 1 und 2 u. s. w. Fast in all
wurden sie bis auf 7 Dezimalstellen berechnet, w
herung in den meisten Fällen hinreichend ist.

Es bestehet demnach jeder Logarithme aus
nemlich den ganzen, und dann noch aus den,
hängten Decimalstellen.

Die Ganze, die ein Logarithme hat, heissen se
ziffer (Charakteristik). Die Dezimalstelle
der Kennziffer angehängt sind, heissen Mantisse
z. B. Log. 77 = 1,8864907. Hier ist also 1

ziffer des Logarithmen von 77, und 8864907, worunter man 10 Million-Theile versteht, sind die Mantissen.

§. 25.

Die Kennziffer zeigt schon bei dem ersten Anblick, aus wie viel Ziffern, bei dem so eben angeführten System, die einem gegebenen Logarithme zugehörige Zahl besteht. Ist nemlich die Kennziffer 0, so kann dieselbe Zahl nur zwischen 1 u. 10, also nur einzifferig seyn. Ist die Kennziffer 1, so ist die korrespondirende Zahl zwischen 10 und 100, mithin zweizifferig u. s. w.; daher denn überhaupt diese Regel gilt:

Die Anzahl der Ziffern, aus denen eine ganze Zahl bestehet, ist um 1 größer als die Kennziffer des ihr zugehörigen Logarithmen.

Wenn man also die Anzahl der Ziffern einer Zahl um 1 vermindert, so hat man die Kennziffer des ihr zugehörigen Logarithmen; und umgekehrt: Sezt man der Kennziffer eines Logarithmen 1 zu, so zeigt dieselbe die Anzahl der ganzen Ziffern, aus denen dessen korrespondirende Zahl bestehet. Es sey z. B. die Zahl 50674852 gegeben, die aus 8 Ziffern besteht, so ist die Kennziffer ihres Logarithmen 8 − 1, oder 7; und im andern Fall entspricht zum Beispiel dem Logarithmen 57302684, dessen Kennziffer 5 ist, eine Zahl, die ohne die etwa dazu gehörigen Brüche aus 5 + 1, d. i. 6 Ziffern besteht, und mithin in den Hunderttausenden ist.

§. 26.

Da es also so leicht ist, die Kennziffer des Logarithmen einer jeden Zahl zu bestimmen, so wurde sie, zur Vermeidung alles Ueberflüssigen in den Tabellen ganz hinweggelassen, und

es sind nur die Mantissen eingetragen worden. Und weil auch bei mehreren unmittelbar aufeinander folgenden Logarithmen die ersten Dezimalstellen einander gleich sind, indem der Unterschied von jener sich erst in der vierten und den folgenden Stellen zeigt; so hat man diese 3 ersten Stellen der Mantissen ebenfalls nicht wiederholt, sondern die Stelle, da sie stehen sollten, bis dahin, wo sie sich änderten, leer gelassen. So steht z. B. in Vegas Logarithmen-Tabellen S. 43 bei den Logarithmen der Zahlen 2858, 2859 ꝛc. bis 2865 folgendes:

N.	0	
⁝⁝⁝⁝		
2858	4560622	
2859	2142	
2860	3660	
⁝⁝⁝⁝	⁝⁝⁝⁝	
2865	4571246	

Hier ist also:

Log. 2858 = 3, 4560622
Log. 2859 = 3, 4562142
Log. 2860 = 3, 4563660
u. s. w.

§. 27.

Hätte man nun aber die Tabellen so eingerichtet, daß man alle Zahlen der Ordnung nach von 1 bis auf mehrere Millionen mit ihren Logarithmen kolumnenweise hingesetzt hätte, so würde man, in dem Formate, wie die oben erwähnten Vegaschen Tabellen sind, da nicht über 200 Zahlen mit ihren Logarithmen auf einer Seite Platz finden konnten, zu 10 Millionen Zahlen und ihren Logarithmen ein Werk von 50000 Seiten, oder 350 Seiten auf 1 Band gerechnet, von 115 Bänden, wie jene Tabelle ist, gebraucht haben. Da nun in

dieser letzteren wirklich die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000000 stehen, und nicht einmal den ganzen Band anfüllen, indem $\frac{1}{3}$ desselben trigonometrische Tabellen enthält; so erhellet hieraus, wie wichtig es war, durch eine sinnreiche Einrichtung jene Unannehmlichkeit zu heben, welche leztere, wenn sie Bestände hätte, die Erfindung der Logarithmen so ziemlich in die Klasse der zwar sinnreichen, aber in der Wirklichkeit zum allgemeinen Gebrauch wenig anwendbaren Speculationen würde herabgesetzt haben.

§. 28.

Mit dieser Einrichtung hat es nun im Wesentlichen folgende Bewandniß.

1) Die natürlichen Zahlen von 0 bis 10099 stehen von p. 2 bis p. 187 in den mit N bezeichneten Kolumnen. Neben jeder Zahl befindet sich ihr Logarithme, und zwar sind

2) bei den Zahlen unter 1000, von p. 2 – p. 5, ihre zugehörigen Logarithmen in der, oben auf jeder Seite mit Log. bezeichneten Kolumne, mit ihrer Kennziffer und den 7 Decimalstellen oder der Mantisse. So stehet z. B. p. 4 neben der Zahl 630 der Decimalbruch 2,7993405, welches demnach der Logarithme von 630 ist.

3) Die Zahlen, die über 1000 und unter 10100 sind, folgen sich, wie schon gesagt, auch kolumnenweise und in natürlicher Ordnung von p. 6 bis p. 187, jedoch so, daß sie auf jeder Seite die, oben mit N bezeichnete, erste vertikale Kolumne einnehmen, und je 50 auf einer Seite befindlich sind. Neben ihnen in der, oben mit 0 bezeichneten, Kolumne stehen ihre Logarithmen, mit Hinweglassung ihrer Kennziffer, und auf die Art, wie §. 26 angegeben worden ist. Z. B. zu der Zahl 5975

Die Logarithmen der Zahlen über 10099
10000000 finden sich durch Zusammensetzu
kommt es darauf an, ob diese Zahlen unt
unter 1000000, unter 10000000, das
fünfzifferig, sechszifferig, sieb
sind.

4) Sind die Zahlen fünfzifferig, so werden i
men auf folgende Art zusammengesetzt.

α. Die Kennziffer des Logarithmen einer a
bestehenden Zahl ist 4 (§. 25). Eine so
abcde, wo e die Einheiten, d die Zehne
derte ꝛc. vorstellen.

β. Man suche nun zu der vierzifferigen Zah
N° 3 die 3 vordersten Decimalstellen des
rigen Logarithmen.

γ. An diese hänge man um die sieben D
des verlangten Logarithmen zu ergänzen
jenigen 4 Zahlen, die in einerlei Horizon
abcd, und zugleich in eben der Vertikal
stehen, auf die man also trift, wenn m
leichte mechanische Operation anzugeben,
Finger der linken Hand auf die in der
befindliche Zahl abcd hält, und mit dem
derselben Hand von da aus horizontal he
bis er unter die Spalte e kommt.

Die Kennziffer 4, jene 3 ersten und diese 4 letzten Decimalstellen in einen Dezimalbruch vereiniget, geben sodann den verlangten Logarithmen. Folgendes Beispiel wird diß erläutern:

Gesetzt man sucht den Logarithmen der fünfzifferigen Zahl 54738 = abcde, so ist:

Kennziffer derselben	= 4 =	4,0000000
3 ersten Decimalstellen des Log. abcd, oder Log. 5473	= =	738
Hierzu kommt noch (nach γ) wegen e = 8	= = =	2889
Also Log. 54738	=	4,7382889

Wenn man, nachdem man die 3 zu abcd gehörigen Dezimalstellen gefunden, bei der fünften Ziffer e auf 4 solche Dezimalstellen geräth, von denen die erstern mit einem Sternlein oder * bezeichnet ist, so vermehrt man die zu abcd gehörige dritte Decimalstelle um eine Einheit. Ein Beispiel hievon s. unter §. 30.

5) Bestehet eine Zahl aus 6 Ziffern abcdef, so ist die Kennziffer ihres Logarithmen 5. Nun suche man, nach der vorhergehenden Nummer, die dem Logarithmen von abcde zugehörige Mantisse, und addire zu derselben von hinten, d. i. von der 7ten Dezimalstelle an, diejenige Zahl, die in der mit P.P. (Part. Proportion.) bezeichneten Kolumne neben derjenigen Zahl steht, die der letzten Ziffer f die gegebene Zahl abcdef gleich ist.

Beispiel.

Man sucht die Logarithmen von 318948

Kennziffer von = = =	318948	=	5,0000000
Mantisse von Log. = =	31894	=	5037090
Proportionaltheil wegen = =	8	=	109
Folglich Log.	318948	=	5,5037199

dieser g correspondirenden Zahl.

Beispiel.

Man verlangt den Logarithmen von 4951675.

Kennziffer von 4951675	=	6,00
Mantisse von 49516	=	69.
Proportionaltheil wegen 7	=	
Proportionaltheil wegen 5	=	
Folglich Log. 4951675	=	6,69.

wo bei dem Proportionaltheil von 5 die letzte insoferne sie in die achte Decimalstelle zu steh hinweggeworfen wird, weil die Logarithmen n Stellen berechnet sind; doch kann man, wenn weggeworfene Zahl über 5 ist, die siebende Dec um eine Einheit vermehren.

7) Wenn Zahlen über 7 Ziffern haben, so läßt von ihren Logarithmen (§. 25) die Kennziff angeben; aber da die Logarithmen bei den von Grund gelegten Tabellen nur bis auf 7 Decin berechnet sind, so coincidiren die Mantissen der men, der mehr als 7zifferigen Zahlen mit den derjenigen Logarithmen die zu Zahlen mit 7 Zi hören. Bei dieser aus der Natur der Sache fl Unvollkommenheit werden also dergleichen Za viel sie auch Ziffern haben, nachdem die Kennzi Logarithmen bestimmt worden, wie solche mit 7 behandelt.

Beispiel.

Man sucht den Logarithmen von 5798653779.

Kennziffer von	5798653779	=	9,0000000
Mantisse des Log.	57986	=	7633232
Prop. Theil wegen	5	=	37
Prop. Theil wegen	3	=	2,2
Prop. Theil wegen	7	=	0,52
Folglich Log.	5798653779	=	9,7633272

wo der dritte Proportionaltheil wegen 7 nichts anders ist, als $\frac{1}{100}$ der in P. P. bei der Ziffer 7 stehenden Zahl 52, welcher wie man siehet, keinen andern Einfluß auf den gesuchten Logarithmen hat, als daß man seine 7te Decimalziffer um eine Einheit vermehren kann.

§. 29.

Zur Uebung wollen wir noch folgende Beispiele berechnen. Man verlangt den Logarithmen von den Zahlen 1) 479963; 2) 51743098; 3) 51645738; 4) 271910569; 5) 8990000000.

1) Kennziffer von	479963	=	5,0000000
Mantisse von Log.	47996	=	6812050
Prop. Theil wegen	3	=	27
Log.	479963	=	5,6812077

2) Kennziffer von	51743098	=	7,0000000
Mantisse von Log.	51743	=	7138516
Proportionaltheil wegen	0	=	0
Proportionaltheil wegen	9	=	7,6
Proportionaltheil wegen	8	=	0,66
Log.	51743098	=	7,7138524

Log. 51645738 = 7,7

*) Wo (nach §. 28 N° 4 γ) wegen den mit neten Decimalstellen 0283, anstatt 712 gesetzt werden.

4) Kennziffer von 271910569 = 8,0
Mantisse von Log. 27191 = 4
Proportionaltheil wegen 0 =
Proportionaltheil wegen 5 =
Proportionaltheil wegen 6 =

Log. 271910569 = 8,4

5) Kennziffer von 899000000 = 9,0
Mantisse von Log. 89900 = 9

Log. 899000000 = 9,9

wo wegen der auf 89900 folgenden Nullen keine Pr theile hinzukommen.

§. 30.

Hat man sich nun die nöthige Fertigkeit im erworben, so wird auch die umgekehrte Frage, d gegebenen Logarithmen zugehörige finden, sehr leicht. Folgende allgemeine Bemerk Vorschriften, verbunden mit den am Ende beigefü renden Beispielen, werden das Wesentliche hievon höriges Licht setzen.

fern die, der ihm entsprechenden Zahl, zugehörige
bestehen müssen, (nemlich nach eben erwähntem
m + 1 Ziffern); die Ziffern selbst aber aus jener
nicht erkannt werden können, sondern sich aus der
ergeben müssen, so fängt man mit letztern an.
nemlich in der Tabelle unter Logarithmen die Mantiss
dergestalt auf, daß man zuerst die 3 vordern Dec
abc bestimmt, welche irgendwo in der mit 0 bezeich
lumne vorkommen müssen, da die in diese leztere ein
3 voranstehenden Zahlen von 000 anfangen, und
Einheit steigend, bis 999 fortgehen. Zu diesen drei
Decimalstellen gehören, nach der Einrichtung der
noch diejenigen vierzifferigen Zahlen als Ergänzung
cimalstellen eines jeden Logarithmen, die in der mit
3 . . . . 9 bezeichneten verticalen Kolumnen mit
in eben derselben Horinzontalreihe, theils in den u
ben bis zu abc + 1 befindlichen, stehen, wozu auch
nigen zu rechnen sind, die in der unmittelbar übe
henden Horinzontalreihe mit einem Sternchen (*)
sind. Unter allen diesen suche man die Zahl defg
det sie sich genau in der Tabelle, so nehme man i
lumne der natürlichen Zahlen N diejenige vierziffe
ABCD, welche in eben derselben Horizontalreih
steht, und hänge hinter diese Zahl ABCD als fü
noch diejenige E hinzu, welche die verticale Kolum
net, in welcher defg befindlich ist. Auf diese W
sich die fünfzifferige Zahl ABCDE, die dem gegeb
rithmen m, abcdefg zugehört. Nun kommt es nur

3
4
2c.

so gehört dieselbe in die Klasse der Einheiten,
Zehner,
Hunderter,
Tausender,
Zehntausender,
2c.

d. h. die durch ABCDE ausgedrückten Ganzen be

Ein
Zwei
Drei
Vier
Fünf
2c.
} Ziffern.

Hieraus entspringt folgende Regel für den Fall, d
$=4$, sondern entweder kleiner oder grösser als diese
So viel $m+1$ Einheiten enthält, eben so
fern muß die durch ABCDE ausgedrückt
Zahl haben. Man schneide also in dem
Fall von E an so viel Decimalstellen ab,
Ueberrest noch $m + 1$ Ziffern als Ga
hält; oder man hänge im andern an E
Nullen an, daß die 5 Ziffern ABCDE, und d

hängten Nullen zusammen so viel Ziffern ausmachen, als m + 1 Einheiten ausdrückt, daher entsprechen, für m = 0, 1, 2, 3, 4, 5 2c. den Logarithmen

0,abcdefg	die Zahlen:			A,BCDE
1,abcdefg	=	=	=	AB,CDE
2,abcdefg	=	=	=	ABC,DE
3,abcdefg	=	=	=	ABCD,E
4,abcdefg	=	=		ABCDE
5,abcdefg	=	=		ABCDE0.
2c.				2c.

Diese Vorschrift, aus den bekannten, dem gegebenen Logarithmen m,abcdefg entsprechenden Ziffern ABCDEF.... die demselben zugehörige Ganze der Zahl ABCDEF.... zu bestimmen, ist allgemein: daher man sich in der Folge immer hierauf beziehen wird.

Wenn die vier letzten Decimalstellen defg sich nicht unter den zu abc gehörigen, in die Kolumnen 0, 1, 2, 3.... 9 eingetragenen befinden; so suche man unter letzteren diejenigen vier, d′ e′ f′ g′, die zunächst kleiner als defg sind. Gesetzt nun, die Zahl d′e′f′g′ stehe mit ABCD der Kolumne N in ebenderselben Horizontal- und mit E in einerlei Vertikalreihe, so hat man abermals die 5 ersten Ziffern ABCDE der verlangten Zahl. Nunmehr ziehe man d′e′f′g′ von defg ab, und suche den Ueberrest N′ unter der sich auf abc und d′e′f′g′ beziehenden, neben 1, 2, 3....9 stehenden Zahlen oder Proportionaltheilen der hintersten Kolumne PP. Befindet sich derselbe wirklich darunter, also neben einer der Zahlen 1, 2....9, etwa neben F, so ist F die 6ste Ziffer der verlangten Zahl und diese also ABCDEF, wo sodann nur noch wegen der Kennziffer m das oben gesagte entweder durch Hinwegschneiden von Decimalstellen, oder durch Anhängen von Nullen berichtiget werden

hende Zahl, die wir abermal F heissen wollen,
als sechste Ziffer, wie oben, an. Nun ziehe man
ab, nehme den Rest 10fach, und suche das
Produkt wieder unter eben den Proportionalthei
Produkt selbst, oder der nächst kleinere Proportion
neben der Zahl G, so ist G die 7te Ziffer der ges
ABCDEFG, deren Ganze jetzt noch vermittelst de
m nach der oben gegebenen Vorschrift zu bestimmen

§. 31.

Folgende Beispiele dienen zur Erläuterung des
henden §.

Man soll die Zahlen angeben, welche den Loga

1) 3,8108372
2) 2,7148911
3) 6,7148911
4) 5,6812077
5) 0,5042160
6) 9,7130345

zugehören?

Auflösung.

Ad 1) Mantisse	Zahl
810	6469 mit 8372 in einer Horiz
8372	0 mit 8372 in einer Vertik

folglich wegen der Kennziffer 3 ist die gesuchte Za
oder Log. 6469 = 3,8108372.

Ad 2)

Mantisse	Zahl
714	5186 mit 8911 in einer Horiz. Reihe.
8911	7 mit 8911 in einer Vert. R.

Die Ziffern der gesuchten Zahl sind also 51867, und mithin ist wegen der Kennziffer 2 diese selbst 518,67 oder

Log. von 518,67 = 2,7148911.

Ad 3)

Log. 5186700 = 6,7148911.

Ad 4)

Mantisse	Zahl.
681	
2077	4799 mit 2050 in einer Horizontalreihe.
nächst kleinere Zahl 2050	6 mit 2050 in einer Vert. R.
erste Differenz 27	= = 3 zu 27 gehörig.

Es sind daher die Ziffern der gesuchten Zahl 479963, und da die Kennziffer = 5, so ist dieselbe = 479963, oder Log. 479963 = 5,6812077.

Ad 5)

Mantisse	Zahl.
504	
2160	3193 mit 2125 in einer Horiz. Reihe.
nächst kleinere Zahl 2125	1 mit 2125 in einer Vert. Reihe.
Erste Differenz: 35	
nächst kleinere Zahl von PP. = = 27	2 zur Differenz 27 gehörig.
Zweite Differenz = 8	
multiplicirt mit 10 = 80	6 zu 80 oder 81 gehörig.

713	
0345	
	5164 mit *0283 in einer
nächst klein. Zahl *0283	5 mit *0283 in einer
erste Differenz = 62	
nächst kl. Zahl in PP. 59	7 in PP. zur Differen
zweite Differenz = 3	
multiplizirt mit 10 30	3 in PP. zu 30 ge
nächst kl. Zahl in PP. 25	

Also sind die Anfangsziffern der gesuchten Zah
und wegen der Kennziffer 9 ist dieselbe 51645730
9,7130345 = Log. 516457300 ist.

§. 32.

Es würde überflüssig seyn, sich noch länger hi
halten. Wer etwa noch einigen Anstand haben soll
in der Einleitung zu Vegas Logarithmentabellen,
ohnehin bei der Hand haben muß, die ausführlich
Einrichtung erwähnter Tabellen, nebst den daselbs
ten Beispielen nachsehen. Noch einmal aber bemer
wer nicht recht geübt ist, für gegebene Zahlen ihre Lo
oder für bekannte Logarithmen ihre zugehörige Z
zuschlagen, und zusammen zu setzen, sich nicht an
folgende Anwendungen machen soll: weil dieser An
bei jedem Schritte Hindernisse in den Weg legen wi

gens zu thun.

E. Eigenschaften der Logarithmen.

§. 33.

Die Eigenschaften der Logarithmen fliessen aus de
tung der zu einem Systeme verbundenen geometri
arithmetischen Progression. Um nun die Unters
vereinfachen, betrachten wir nur solche Systeme,
1 = 0 ist, das ist: bei welchen das erste Glied der
schen Progression = 1, und das der arithmetische
setzt wird, und schicken in dieser Beziehung, zu Erl
des Folgenden, folgende Wahrheiten voraus:

1) In jeder geometrischen Progression, deren e
1 ist, ist bei jedem ihrer Glieder der Nenner d
sion so oft Faktor, als Glieder vor diesem
Diß folgt aus der Natur der Progression selb
erste Glied derselben ist 1, das zweite = den
das dritte = dem Quadrat, das vierte = de
des Nenners, u. so fort; und mithin das m^{te}
dukt von m — 1 Faktoren, deren jeder der N
Aber eben so viel Glieder gehen auch vor di
folglich 2c.

2) In jeder arithmetischen Progression, deren e
0 ist, ist jedes Glied ein so vielfaches der Di

Wenn man in einem logarithmischen Syst
Anfangsglieder 1 und 0 sind, irgend zwei Glie
metrischen Progression multiplicirt, und die corre
in der arithmetischen addirt; so correspondiren
und Summe, das ist diese Summe ist jenes Pr
rithme.

Beweiß.

Jedes Produkt von zwei oder mehreren G
geometrischen Progression, deren erstes Glied 1 is
wieder ein Glied derselben seyn: denn ein Glied
gression ist nichts anders als ein Produkt aus de
eine gewisse Anzahl gleicher Faktoren, deren jeder d
Progression ist. Mithin ist auch das Produkt aus zw
reren Gliedern der geometrischen Progression nicht
ein Produkt aus der Einheit in eine gewisse Anza
ner gleicher Faktoren. Da nun die Anzahl dieser F
1 an mit jedem Gliede um eine Einheit wächset,
gression so weit fortgesetzt werden kann, als man
man nothwendig auf ein Glied kommen, das ein
jeder beliebigen Anzahl dieser gleichen Faktoren ist.
auch das Produkt von zwei oder mehreren Gliede
gression ebenfalls ein Glied derselben seyn.

Auf eine ähnliche Art erhellet ferner, daß j
zweier oder mehrerer Glieder einer arithmetischen
deren erstes Glied 0 ist, ein Glied derselben sey.
solche Summe ist nichts anders, als ein gewisses v

Differenz. Da nun die Glieder von 1mal die Differenz an um diese Differenz steigen, und soweit fortgesetzt werden können, als man will, so befindet sich nothwendig jedes vielfache der Differenz unter den Gliedern der Progression, also auch die Summe zweier oder mehrerer Glieder.

Wenn man daher in einem logarithmischen Systeme in der geometrischen Progression zwei Glieder multiplizirt, und in der arithmetischen die zwei correspondirenden addirt, so befinden sich Produkt und Summe in ihren respektiven Progressionen. Und nun ist nur noch zu erweisen, daß sie sich auch correspondiren, welches also erhellet:

In jedem Gliede der geometrischen Progression ist der Nenner so oft Faktor, als Glieder vor demselben hergehen (§. 33.). Mithin ist im Produkt zweier Glieder derselben der Nenner so oft Faktor, als Glieder sowol vor dem einen, als vor dem andern Faktor hergehen. Ferner: Jedes Glied einer arithmetischen Progression ist ein so vielfaches der Differenz, als Glieder vor diesem hergehen (§. 33.). Also ist die Summe zweier Glieder einer arithmetischen Progression ein so vielfaches der Differenz, als sowol vor dem einen, als vor dem andern Glieder hergehen.

Nun korrespondiren sich aber die Glieder der beiden Progressionen, aus denen Produkt und Summe gebildet werden, d. i.: es gehe vor jeden zwei korrespondirenden gleich viele Glieder her. Also enthält das Produkt zweier Glieder der geometrischen den Nenner eben so oft als Faktor, als die Summe der 2 korrespondirenden der arithmetischen ein vielfaches der Differenz ist. Da nun aber jedes Glied der geometrischen den Nenner so oft als Faktor enthält, als Glieder vor ihm hergehen, und jedes der arithmetischen ein so vielfaches

der Differenz ist, als Glieder vor ihm hergehen: so gehen demnach vor dem Produkt der beiden Glieder der geometrischen eben so viel Glieder her, als vor der Summe der beiden Glieder der arithmetischen, das ist: Jenes Produkt und diese Summe korrespondiren sich; folglich ist die Summe der beiden Glieder der arithmetischen Progression der Logarithme des Produkt's der beiden korresondirenden der geometrischen.

§. 35. Zusatz.

Da nun (§. 15.) alle Zahlen als Glieder einer geometrischen Progression betrachtet werden können, deren korrespondirende der arithmetischen ihre Logarithmen sind: so ist also der Logarithme des Produkts zweier Zahlen die Summe der Logarithmen beider Faktoren.

§. 36. Zusatz.

Dieser Beweiß ist nicht auf zwei Faktoren allein eingeschränkt, sondern kann auf jede beliebige Anzahl derselben ausgedehnt werden: indem man bei den obigen Schlüssen blos anstatt des Worts zwei, mehrere zu setzen braucht. Es ist also der Satz allgemein, daß der Logarithme eines Produkts gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren ist, welches also ausgedrückt wird:

$$\text{Log. } abcd \ldots = \text{Log. } a + \text{Log. } b + \text{Log. } c + \text{Log. } d + \text{etc.}$$

Von diesem wichtigen Satze, welcher die Grundlage aller Anwendungen der Lehre von den Logarithmen ausmacht, geben wir noch folgenden Beweiß:

§. 37. Satz.

Wenn eine geometrische und arithmetische Progression (deren Anfangsglieder nicht gerade 1 und 0, sondern beliebig seyn dürfen,) sich korrespondiren, und in der geometrischen

vier Glieder genommen werden, welche in geometrischer Proportion stehen, so stehen die vier ihnen korrespondirenden der arithmetischen in arithmetischer Proportion.

Beweiß.

Man habe also:

Zeiger: 1, 2, 3.... m... n... t... v...,
Geometrische Progression: a, ab, ab^2... P... Q... R... S...
Arithmetische Progression: $\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta$... p... q... r... s...

und es seyen die Glieder P, Q, R, S von solcher Beschaffenheit, daß $P : Q = R : S$; so soll erwiesen werden, daß auch $p - q = r - s$ seyn werde.

Dieses erhellet nun also: Vermöge der Natur der geometrischen Progressionen haben wir:

$$P = ab^{m-1},\ Q = ab^{n-1}$$
$$R = ab^{t-1},\ S = ab^{v-1}$$

Eben so folgt aus der Natur der arithmetischen Progressionen, daß:

$$p = \alpha + (m-1)\beta;\quad q = \alpha + (n-1)\beta$$
$$v = \alpha + (t-1)\beta,\quad s = \alpha + (v-1)\beta \text{ ist;}$$

daher verwandelt sich $P : Q = R : S$ in

$ab^{m-1} : ab^{n-1} = ab^{t-1} : ab^{v-1}$, woraus

$$b^{m+v-2} = b^{n+t-2},$$

also $m + v - 2 = n + t - 2$, mithin auch $m + v = n + t$, und demnach $m - n = t - v$ folgt.

Nun ist aber auch

$p - q = \alpha + (m-1)\beta - \{\alpha + (n-1)\beta\} = (m-n)\beta$, und eben so $r - s = (t - v)\beta$. Da wir nun so eben erwiesen, daß $m - n = t - v$, und also auch $(m-n)\beta = (t-v)\beta$ sey, so ist mithin $p - q = r - s$. Wenn

demnach P, Q, R, S in geometrischer Proportion stehn, so stehen p, q, r, s in arithmetischer Proportion.

§. 38. Satz.

Der Logarithme eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Beweiß.

Wir zeigen die Wahrheit dieses Satzes zuerst an zwei Faktoren A und B, und erweisen, daß Log. AB = Log. A + Log. B sey.

Die Zahlen A und B mögen nämlich seyn, welche sie wollen, so können sowol sie, als auch ihr Produkt als Glieder einer geometrischen Progression angesehen werden (§. 15.). Da nun $AB = \frac{AB}{1}$, so ist ν 1 : A = B : AB; mithin stehen die 4 Glieder 1, A, B, AB dieser Progression in geometrischer Proportion; daher müssen, nach dem vorhergehenden Satze, ihre korrespondirenden der arithmetischen in arithmetischer Proportion stehen, nun hat man im vorhergehenden §. $a = 1$, und $\alpha = 0$ angenommen, also 0 — Log. A = Log. B — Log. AB, woraus Log. AB = Log. A + B folgt.

Nunmehr ist leicht zu erweisen, daß auch Log. ABC = Log. A + Log. B + Log. C sey; denn man nehme $AB = A'$, so ist Log. ABC = Log. A′ C = Log. A′ + Log. C = Log. AB + Log. C = Log. A + Log. B + Log. C, welcher Beweiß auf jede beliebige Art von Faktoren ausgedehnt werden kann.

§. 39. Zusatz.

Aus dem so eben gegebenen Beweise erhellet, warum bei dem in den logarithmischen Tabellen zum Grund liegenden logarithmischen Systeme das erste Glied der geometrischen Pro-

gression 1, und das der arithmetischen 0 angenommen, und also Log. 1 = 0 gesetzt wird. Wäre nämlich Log. 1 nicht = 0, so hätte man wegen 1 : A = B : AB; Log. AB = Log. A + Log. B − Log. 1, und müßte also, um den Logarithmen eines Produkts zweier Faktoren zu finden, von der Summe der Logarithmen der Faktoren jedesmal den Logarithmen von 1 abziehen. Diese überflüssige Subtraktion zu vermeiden, nahm man also Log. 1 = 0 an, und setze die Anfangsglieder der geometrischen und arithmetischen Progression 1 und 0.

§. 40. Zusatz.

Die so eben erwiesene schöne Eigenschaft der Logarithmen verwandelt die Multiplikation der Zahlen in eine Addition ihrer Logarithmen. Und ob es gleich auf den ersten Anblick scheinen sollte, als ob der Vortheil in der Ausübung von geringer Erheblichkeit sey, indem kleine Zahlen eben so leicht auf die gewöhnliche Weise multiplicirt, als ihm Logarithmen addirt werden, und bei ganz großen, aus mehr als 7 Ziffern bestehenden die Logarithmen nicht mehr gefunden werden können; so wird doch die Folge ergeben, daß dieser Einwurf nur scheinbar ist, und daß, so selten bei großen Rechnungen eine Multiplikation allein vorkommt, sondern gemeiniglich Multiplikationen und Divisionen, Ausziehungen der Wurzeln, Erhebungen in Potenzen rc. mit einander verbunden sind, die noch weiter erklärt werdenden Eigenschaften der Logarithmen für die Abkürzungen der verwickelsten Rechnungen die bewunderungswürdigste Erfindung sind, ohne welche sogar eine Menge eigener, höchstinteressanter arithmetischer Aufgaben nicht können aufgelöset werden.

§. 41.

Daß nun aber wirklich die Multiplikation der Zahlen durch bloße Addition ihrer Logarithmen bewerkstelliget werden könne, erhellet also:

und gleichfalls in den Tafeln zu finden. Die ihm
Zahl, nach §. 30 u. fern. bestimmt, ist daher d
Produkt.

§. 42. Beispiel.

Man sucht das Produkt x der Zahlen 397
oder $x = 397 \cdot 7587$. Es ist also: Log. x =
+ Log. 7587.

Nun ist	Log. 397	=	2,5987905	
	Log. 7587	=	3,8801846	
	Log. x	=	6,4789751	
	mithin x	=	3012833	(s. §. 3o

§. 43. Satz.

Der Logarithme eines Quotienten ist gleich
schiede der Logarithmen des Divisors und Dividen

$$\text{Log. } \frac{A}{B} = \text{Log. } A - \text{Log. } B.$$

Beweiß.

Es sey $\frac{A}{B} = C$, so ist $A = BC$, also Log. A

+ Log. C oder Log. $\frac{A}{B} = A - \text{Log. } B$.

§. 44. Zusatz.

Dieser Satz, der nur eine Folge von der Eigensc
ist, verwandelt die Division in eine Subtraktion;

statt zwei Zahlen eine durch die andre zu dividiren, subtrahire man ihre Logarithmen, so ist der Ueberrest der Logarithme des verlangten Quotienten: schlägt man jenen also in den Tafeln auf, so korrespondirt demselben dieser.

§. 45. Beispiel.

Man soll 3521448 durch 357 dividiren? Der gesuchte Quotient sey x, so haben wir: $x = \frac{3521448}{357}$, also

$$\text{Log. } x = \text{Log. } 3521448 - \text{Log. } 357.$$

Aber	Log.	3521448	= 6,5467213
	Log.	357	= 2,5526682
	Log.	x	= 3,9940531
	mithin	x	= 9864

§. 46. Zusatz.

Wenn man die Operationen der Multiplikation und Division kombinirt, so ist

$$\text{Log. } \frac{ABCD\ldots\ldots}{abcd\ldots\ldots} = \text{Log. } A + \text{Log. } B + \text{Log. } C + \text{ꝛc.}$$
$$-\{\text{Log. } a + \text{Log. } b + \text{Log. } c + \text{ꝛc.}\}$$

§. 47. Definition.

Die decadische Ergänzung eines Logarithmen (complementum arithmeticum) ist der Ueberrest, welchen man erhält, wenn man diesen Logarithmen von 10 Ganzen abziehet.

§. 48. Zusatz.

Es ist also Decad. Ergänzung des $a = 10 - \text{Log. } a$, und hinwiederum Log. $a = 10 -$ Dec. Ergänz. Log. a. Dieses Abziehen des Log. a von der Zahl 10 ist nun eine sehr leichte Operation, indem man nur, von der Kennziffer des Log. a angefangen, jede Ziffer dieses Logarithmen von der Zahl 9,

Der Gebrauch der decadischen Ergänzung is
Nach §. 46 war:

$$\text{Log.}\ \frac{ABCD....}{abcd....} = \text{Log. A} + \text{Log. B} + \text{ꝛc.}$$
$$- \{\text{Log. a} + \text{Log. b} + \text{L}$$

Da nun (§. 48.) Log. a = 10 – Dec. Erg.
Log. b = 10 – Dec. Erg.

so ist

$$\text{Log.}\ \frac{ABCD....}{abcd....} = \text{Log. A} + \text{Log. B} + \text{ꝛc.}$$
$$- \{10 - \text{Dec. Erg. Log. a} + 10 - \text{Dec.}$$
$$+ 10 - \text{Dec. Erg. L}$$
$$= \text{Log. A} + \text{Log. B} + \text{Dec. L. a} + \text{Dec. Erg. L}$$
$$- 10 -$$

woraus folgende zum praktischen Gebrauch sehr beq
fließt, wenn nemlich mehrere Logarithmen (als
C ꝛc.) zu addiren, und von deren Summe einer o
andere (als der von a, b, c ꝛc.) abzuziehen sin
schreibe die zu addirenden Logarithmen unter ei
unter dieselben die decadischen Ergänzungen der zu s
den Logarithmen, addire sodann dieses alles zusam
vermindere hernach die Kennziffer der Summe u
Zehner als decadische Ergänzungen, oder abzuzieh
rithmen vorhanden sind.

Log. 77589		= 4,88
Log. 9600973		= 6,98
Dec. Erg. Log. 3571		= 6,44
Dec. Erg. Log. 7875		= 6,10
Dec. Erg. Log. 13998		= 5,85
		34,44

Die Kennziffer um 3 Zehner vermindert,
giebt Log. x = 4,44
mithin x = 2779

Dieser Werth von x wird viel leichter erhalten, als w
nach §. 46 von der Summe der Logarithmen der Fak
Zählers diejenige der Logarithmen der Faktoren des
abzöge, wovon die Rechnung folgende ist:

Zähler.	Nenner.
Log. 37 = 1,5682017	Log. 3571 = 3,5
Log. 397 = 2,5987905	Log. 7875 = 3,8
Log. 77589 = 4,8898002	Log. 13998 = 4,1
Log. 9600973 = 6,9823119	Log. des Nenn. = 11,5
32	
1,4	

Log. d. Zähl. = 16,0391076
Subtr. Log.
d. Nenn. = 11,5951065

Log. x = 4,4440011 , wie oben.
x = 27797,20

Wenn m eine ganze positive Zahl ist, so i
anders als das Produkt von m gleichen Fakt
jeder gleich a ist. Da nun der Logarithme ein
der Summe der Logarithmen der Faktoren gleich
vorliegenden Falle aber die Anzahl dieser gleich
durch m angedeutet wird, und jeder Faktor a ist,

a^m = m Log. a. Ist aber m ein Bruch, den wi

vorstellen wollen, wo p und q ganze Zahlen sind,
in diesem Falle die Wahrheit des behaupteten

darthun: Man setze $a^m = a^{\frac{p}{q}} = b$; so ist a^p =
gleiche Zahlen auch gleiche Logarithmen haben m
folgt daß Log. a^p = b^q sey. Es ist aber nach
erwiesenen, weil p und q ganze Zahlen sind, Log. a
a, und Log. b^q = q Log. b, und folglich auch
= q Log. b, woraus

$$\text{Log. } b = \frac{p}{q} \text{ Log. } a \text{ folgt.}$$ Da nun b =

gesetzt wurde, so haben wir

$$\text{Log. } a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \text{ Log. } a.$$

Ist m verneint, so sey $a^{-m} = b$; nun ist a^{-m}
folglich $1 = b a^m$; mithin Log. 1 = Log. b +
= Log. b + m Log. a, aber Log. 1 = 0, dah
= − m Log. a und also auch Log. a^{-m} = − m

Da endlich die Irrationalzahlen rationale Brüche zu Gränzen haben, so ist also der Satz, mit Ausnahme der imaginären Werthe von m, allgemein bewiesen.

§. 51. Zusatz.

Der vorhergehende verwandelt demnach die wiederholte Multiplikation in eine einfache Multiplikation. Beispiele hievon kommen weiter unten in Menge vor.

§. 52. Zusatz.

Der Logarithme der mten Wurzel aus einerr Größe ist gleich dem $\frac{1}{m}$ten Theil des Logarithmen eben diese Größe, oder $\text{Log.}\ \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m}\ \text{Log. a}$.

Beweiß.

Dieser Satz folgt aus dem §. 50. bewiesenen, wenn man daselbst $p=1$, und $q=m$ setzt. Allein er kann auch unmittelbar also erwiesen werden. Es sey $\sqrt[m]{a} = x$, so ist $a=x^m$, und $\text{Log. a} = \text{Log. } x^m = m \text{ Log } x$, mithin Log. x oder $\text{Log.}\ \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m}\ \text{Log. a}$, die zahlreichen Anwendungen hievon machen, ebenfalls unten einen eigenen Abschnitt aus.

Zufolge dieses Satzes verwandelt sich demnach die Ausziehung der Wurzeln in eine einfache Division.

F. Von den Logarithmen der Brüche.

§. 53.

Brüche sind, bekanntermaßen, nichts anders als Quotienten. Es findet sich also ihr Logarithme, indem man von dem Logarithmen des Zählers den des Nenners abziehet. Ist der Bruch uneigentlich, so ist dieser Ueberrest positiv; ist aber

= Log. a — Log. (3045.) — (Log

= m — (Log. b — Log. a) — m, wo
bige ganze Zahl vorstellt. Nimmt man nun d
an, daß sie größer, als Log. b — Log. a ist,
berrest m — (Log. b — Log. a) positiv, un
lung des Log. $\frac{a}{b}$ unter der Form m — (Log.
— m ist öfters, in Verbindung mit andern Re
bequem.

§. 54. Beispiele.

1) $\text{Log. } 373 \frac{7}{9} = \text{Log. } \frac{3364}{9} = \text{Log. } 336$

=

2) $\text{Log. } 7{,}5439 = \text{Log. } \frac{75439}{10000} = \text{Log. } 754$

— Log. 10000 =

3) $\text{Log. } \frac{317}{9725} = \text{Log. } 317 - \text{Log. } 9725 =$

$-\{\text{L. } 9725 - \text{L. } 317\} = - 1{,}4868303$

$- (\text{Log. } 9725 - \text{Log. } 317) = 2 - 1{,}4$

nemlich = 0,51

= 3 − 1,48

nemlich = 1,51

= 4 − 1,48

nemlich = 2,51

u. s. w.

§. 55.

Gleichwie der Logarithme eines ächten Bruchs ne
so ist hinwiederum auch die einem gegebenen negativ
rithmen korrespondirende Zahl ein ächter Bruch. D
ist nun, die einem solchen bekannten Logarithmen,
— a nennen wollen, zugehörige Zahl zu finden. Let
$\frac{1}{x}$, so ist Log. $\frac{1}{x} = - a$; aber Log. $\frac{1}{x}$ = Log. 1 − Lo
Log. x, also − Log. x = − a, und Log. x = a. M
daher die dem positiven Logarithmen a korrespondirende

so ist $x = \alpha$, und demnach $\frac{1}{\alpha}$ der verlangte Bruch,
gegebener Logarithme − a ist.

Beispiel.

Man verlangt die Zahl, oder den Bruch, dessen Log
— 1,7354200 ist. Hier haben wir a = − 1,735420
Log. x = 1,7354200. Dieß aber ist der Logarith

54,3776. Daher ist $x = \alpha = 54{,}3776$, und folglich $\frac{1}{5}$
der gesuchte Bruch.

§. 56.

Auf eine noch leichtere Art findet sich der Bruch,
der negative Logarithme — a zugehört, also: Es ist −
m — a + m. Läßt man nun m diejenige ganze Z
deuten, die zunächst größer als a, und zugleich der Lo
me von μ ist, und setzt überdieß die Zahl, deren Log

m − a ist, = M, so ist − a der Logarithme des Bruchs

Es sey abermal, wie im vorhergehenden B
$= - 1,7354200$; so haben wir $m = 2$, also μ
$m - a = 0,2645800$. Dieser letztere Decimal
der Logarithme von 1,838992, daher ist $M = 1,8$
also der verlangte Bruch oder $\frac{M}{\mu} = \frac{1,838992}{100}$
welcher Werth, obgleich unter einer andern Gest
vorigen übereinstimmt.

2. Beispiel.

Man sucht den Bruch, dem der Logarithme —
zugehört?

Hier ist also $a = 3,5136804$, folglich $m = 4$,
$m - a = 0,4863196$, welches letztere der Log
3,064217 ist. Daher ist $M = 3,064217$, und
Bruch $\frac{M}{\mu}$ demnach $\frac{3,064217}{10000}$ oder 0,0003064

§. 57.

Man übe sich noch ferner an folgenden Beisp

1) Ein Officier drückt in seinem Rapport die
vor dem Feinde gebliebenen, für viele räths
aus: Die Hunderteltausentel, Zehntausent
rithmen von dem Logarithmen von 97,543
wenn sie als ganze Zahlen gelesen werden, die
aus. Wie groß war also die Zahl der G
Antwort: 986.

2) Welches sind die Zahlen, denen die Logarithmen — 0,5173629; — 4,000546; — 9,8264477; — 10,9087735 zu gehören?

3) Man soll den Werth des Ausdrucks 0,2593 angeben?

G. Ausdrücke der Logarithmen durch Reihen.

Wenn man sich ein beliebiges logarithmisches System denkt, so entspricht jeder Zahl darin ihr bestimmter Logarithme, und so wie man in der geometrischen Progression zu einer andern Zahl fortschreitet, so kommt man auch über ein anderes Glied der arithmetischen. Es ist also in jedem System ein gewisser Zusammenhang zwischen einer Zahl und ihrem Logarithmen. Hätte man nun einen deutlichen Begriff von der Beschaffenheit dieses Zusammenhangs, so ließe sich aus einer gegebenen Zahl ihr zugehöriger Logarithme, und umgekehrt aus dem Logarithmen die Zahl berechnen. Dieser Zusammenhang, oder diese wechselseitige Abhängigkeit beider Größen von einander, obwol wirklich vorhanden, ist aber nicht so deutlich in die Augen fallend und einleuchtend, daß jene Berechnung so leicht wäre, und etwa durch ein Paar Proportionen absolvirt werden könnte. So viel siehet man wohl ein, daß ein Logarithme auf ähnliche Art entspringen müsse, wie ein anderer aus der seinigen entspringt: indem alle Zahlen als Glieder einer geometrischen Progression, und ihre Logarithmen als Glieder einer arithmetischen auf einerlei Art und durch dieselben Operationen berechnet werden.

§. 59.

Wenn nun aber zwey Größen dergestalt von einander abhängen, daß eine durch die andere bestimmt wird; so pflegt man diese Abhängigkeit durch eine Reihe, deren

$\text{Log.}\,(1+x) = A+Bx+Cx^2+Dx$
A, B, C, 2c. noch zu bestimmende, von den W
x unabhängige Zahlen bedeuten, dergestalt, daß
dem x einen beliebigen Werth beilegt, die Logar
Zahl $1+x$ durch die Reihe $A+Bx+Cx^2+$
ausgedrückt, oder bestimmt werde. So wenig
lich für jetzt noch von den unveränderlichen W
Coefficienten A, B, C 2c. weiß, so ist es doch ei
zunehmen, dieselben seyen bereits gefunden, weil
diesem Wege zu ihrer Kenntniß gelangen wird.
diese genommene Reihe den Log. $(1+x)$ a
welchen Werth man auch dem x beilegen mag,
sie auch, für $x = 0$, den Logarithmen von
Aber für $x=0$ verschwinden alle ihre Glieder, aus
das erste A. Da nun Log. $1 = 0$, so ist also A=
Reihe für Log. $(1+x)$ war daher nicht richti
und muß vielmehr also genommen werden:

$\text{Log.}\,(1+x) = Ax+Bx^2Cx^3+$ 2c., w
nahe kaum nöthig ist, zu erinnern, daß bei die
Fiction der Coefficient A nicht das vorhin bei d
Reihe gebrauchte ist. Diese die Log. $(1+x)$ v
Reihe ist nur insoferne passender, als die vorheri
für $x = 0$, wirklich, wie es seyn muß, Log.
oder Log. $1 = 0$ wird. Weiter wissen wir aber no
von ihr. Laßt uns nun sehen, wie wir die Coe
A, B, C 2c. bestimmen könnten.

Soll diese Reihe den Logarithmen von $1 + x$ für jeden Werth von x geben, so muß sie auch richtig seyn, wenn sich x in $x + u$ verwandelt, wo auch u jeden beliebigen Werth haben darf. Daher ist auch

$\text{Log.}(1+x+u) = A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 +$ rc. oder wenn man $(x+u)^2$, $(x+u)^3$, rc. wirklich entwickelt, und alles nach den Potenzen vor u ordnet, von u^2 an aber die Coefficienten, da sie nicht zu unserm Zweck gehören, mit P, Q bezeichnet:

$$\text{Log.}(1+x+u) = \begin{matrix} Ax & +A \\ +\ Bx^2 & +2Bx \\ +\ Cx^3 & +3Cx^2 \\ +\ Dx^4 & +4Dx^3 \\ +\ \text{rc.} & +5Ex^4 \\ & +\ \text{rc.} \end{matrix} \Bigg\} u + Pu^2 + Qu^3 + \text{rc.}$$

Nun ist $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{rc.} = \text{Log.}(1+x)$; daher haben wir:

$$\text{Log.}(1+x+u) = \text{Log.}(1+x) + (A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{rc.})u + Pu^2 + \text{rc.}$$

Oder:

$$\text{Log.}(1+x+u) - \text{Log.}(1+x) = (A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{rc.})u + Pu^2 + \text{rc.}$$

Aber $\text{Log.}(1+x+u) - \text{Log.}(1+x)$ ist $= \text{Log.}\left\{\frac{1+x+u}{1+x}\right\} = \text{Log.}\left\{1 + \frac{u}{1+x}\right\}$ (s. § 43);

Folglich ist

$$\text{Log.}\left\{1 + \frac{u}{1+x}\right\} = (A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 \ldots\ldots) u + Pu^2 + Qu^3 + \text{rc.}$$

$\{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 \ldots\} u + Pu^2$

$= \frac{Au}{1+x} + \frac{Bu^2}{\{1+x\}^2} + \frac{Cu^3}{\{1+x\}^3} +$ rc. oder, wen

mit u dividirt wird,

$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 +$ rc.

$= \frac{A}{1+x} + \frac{Bu^2}{\{1+x\}} + \frac{Cu^2}{\{1+x\}^3} +$ rc.

Diese Gleichung muß für jeden Werth für u u
seyn; also auch bei einerlei x für $u = 0$. In di
aber erhalten wir

$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 +$ rc.

oder $\{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 +$ rc.$\}$ 1
welche Gleichung ebenfalls für jedes x wahr seyn m
richtet man die im ersten Gliede angezeigte sehr leic
plikation wirklich, so ist:

$A + \{2B + A\} x + \{3C + 2B\} x^2 + \{4D$
$+ \{5E + 4D\} x^4 +$ rc. $= A$, also

$\{2B + A\} x + \{3C + 2B\} x^2 + \{4D + 3C\} x^3$
$+ \{5E + 4D\} x^4 +$ rc. $= 0$, also auch wenn du
mit x dividirt wird,

$2B + A + \{3C + 2B\} x + \{4D + 3C\} x^2 + \{5$
$x^3 +$ rc. $= 0$

Diese Gleichung ist, wie alle vorhergehenden, f
Werth von x wahr, mithin auch für $x = 0$. J

Läßt man nunmehr x wieder jeden andern Werth, ... haben, und wirf das erste Glied $2B+A$ der vorhergeh... Gleichung, das immer $= 0$ ist, hinweg, so hat man

$$\{3C+2B\}x+\{4D+3C\}x^2+\{5E+4D\}x^3+ \text{ꝛc.}$$

oder wenn mit x durchgängig dividirt wird,

$$3C+2B+\{4D+3C\}x+\{5E+4D\}x^2+\text{ꝛc.} = \ldots$$

Diese Gleichung ist nun abermal für alle mögliche W... von x wahr, also auch für $x = 0$. In diesem Fall... schwinden aber alle Glieder, bis auf das erste, $3C+2B$, ... ches daher ebenfalls $= 0$ seyn muß, woraus

$C = -\frac{2B}{3} = \frac{A}{3}$ folgt.

Setzt man diese Art zu schliessen immer weiter fo... finden sich nach einander: $D = -\frac{3C}{4} = -\frac{A}{4}$

$E = -\frac{4D}{5} = +\frac{A}{5}$

u. s. w.

Also, daß

Log. $\{1+x\}$, das wir $= Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ꝛc. fingirten nur

$$= Ax-\frac{A}{2}x^2+\frac{A}{3}x^3-\frac{A}{4}x^4+ \ldots$$

oder

$$= A\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5} \ldots\right.$$

ist.

Hier wäre nun alles bestimmt, ausgenommen A. ... diesem Faktor hat es folgende Bewandtniß.

konnte. Da nun aber unendlich viele dergleichen l Systeme möglich sind, so konnte also der Ausdruck men einer Zahl nicht anders als unbestimmt au nichts in die vorhergehende Auflösung die Bedingun webte, daß der Logarithme, für den man einen allge druck durch seine ihm zugehörige Zahl suchte, diesen System insbesondere angehören soll. Es ist also Größe, die von der Natur eines gewissen log Systems insbesondere abhängt. Spricht man üb solchen Systemen, ohne ein bestimmtes darunter so ist A eine Größe, die jeden Werth haben kann. derselben also einen in Zahlen ausgedrückten Werth man dadurch dasjenige System, für das man, ver so eben gefundenen Formel, den Logarithmen der berechnen will, vor allen andern ausgehoben, und wählten oder angenommenen gemacht. Setzt für A den einfachsten Werth, nemlich die Zahl 1, die sich ergebenden Logarithmen die natürlichen. wird weiter unten mehr vorkommen. Braucht ma umgekehrten Falle die Logarithmen für ein gewisse z. B. für das briggische, wie es jetzt unser Zweck ist sich also, was alsdenn dem A für ein Werth zu sey? Dieß soll nun sogleich erörtert werden. vorher nur noch einige Betrachtungen über die Reihe an.

§. 60.

Die Reihe $\text{Log.} \{1+x\} = A \left\{ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{4} \right.$

ist zwar die Grundlage der Berechnung der Logarithmen aus ihren correspondirenden Zahlen; aber, so wie sie hier steht, von keinem bequemen Gebrauche. Für solche x, die > 1 sind, ist sie divergirend, und auch für gebrochene Werthe von x, wenn diese anders nicht sehr klein sind, ist sie nur sehr wenig convergirend; wir leiten daher andere bequemere aus ihr ab. Da nemlich die oben angeführten Schlüsse und Berechnungen nicht als Bedingung voraussetzten, daß x positiv seyn müsse, so kann dieser Grösse auch ein negativer Werth beigelegt werden. Hätte man also auf eben demselben Wege, auf dem wir zu der Reihe für Log. $\{1+x\}$ gelangten, den Ausdruck für $1 - x$ untersucht, so würden wir erhalten haben:

$$\text{Log.}\{1-x\} = A\left\{-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\text{rc.}\right\}$$

welche sich übrigens auch aus der von Log. $\{1+x\}$ herleiten läßt, wenn man $+x$ in $-x$ verwandelt.

Wir haben daher

$$\text{Log.}\{1+x\} = A\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{rc.}\right\}$$

und

$$\text{Log.}\{1-x\} = A\left\{x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\text{rc.}\right\}$$

folglich

$$\text{Log.}\{1+x\}-\text{Log.}\{1-x\} = 2A\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{rc.}\right\}$$

Aber

$$\text{Log.}\{1+x\} - \text{Log.}\{1-x\} = \text{Log.}\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\}$$ s. §. 43.

Mithin ist

$$\text{Log.}\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\} = 2A\left\{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{rc.}\right\},$$ und dieser Ausdruck ist zu den künftigen Zwecken weit geschickter.

§. 61.

Um vordersamst in dem briggischen System den Werth von A zu bestimmen, wollen wir annehmen, daß die Zahl $\frac{1+x}{1-x} = 10$ sey, woraus $x = \frac{9}{11}$ folgt. Es ist also:

$$\text{Log. } 10 = 2A \left\{ \frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} + \frac{9^7}{7.11^7} + \text{rc.} \right\}$$

Da nun in diesem Systeme der Logarithme von $10 = 1$ ist, so haben wir

$$1 = 2A \left\{ \frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} + \text{rc.} \right\}$$

woraus

$$A = \frac{0{,}500000000}{\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} \text{ rc.}} \text{ folgt,}$$

welcher Werth, nach gehörig angestellter Berechnung, = 0,4342944819....... gefunden wird. Der Kürze wegen wollen wir aber, bei allgemeinen Betrachtungen, in der Folge das Zeichen A für diesen Bruch beibehalten. Uebrigens werden wir sogleich (§. 65.) eben diesen Werth von A auf eine leichtere Art finden lehren.

§. 62. Aufgabe.

Aus dem bekannten Logarithmen einer Zahl den Logarithmen der nächst folgenden in der Reihe der natürlichen Zahlen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl, deren Logarithme als bekannt angesehen wird, = a, und es werde der der Zahl a + 1 gesucht: so setze man $\frac{1+x}{1-x} = \frac{a+1}{a}$, woraus $x = \frac{1}{2a+1}$ folgt,

dieß giebt

$$L. \left\{\frac{a+1}{a}\right\} = 2A\left\{\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3\{2a+1\}^3} + \frac{1}{5\{2a+1\}^5} + \text{ꝛc.}\right\}$$

Nun ist $\text{Log.}\left\{\frac{a+1}{a}\right\} = \text{Log.}\{a+1\} - \text{Log. } a$;

daher

$$\text{Log.}\{a+1\} = \text{Log. } a + 2A\left\{\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3\{2a+1\}^3} + \frac{1}{5\{3a+1\}^5} + \text{ꝛc.}\right\}$$

§. 63. Zusatz.

Diese Formel ist zu Berechnung der Logarithmen aller Zahlen hinreichend. Denn da man den Logarithmen von 1 kennt, welcher 0 ist, so ergiebt sich aus dieser der Logarithme von 2, aus dieser wieder der von 3 u. s. w.

So ist für a = 1, 2, 10

$$\text{Log.} 2 = 2A\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \text{ꝛc.}\right\}$$

$$L. 3 = L. 2 + 2A\left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} \frac{1}{9 \cdot 5^9} + \text{ꝛc.}\right\}$$

$$L. 11 = 1 + 2A\left\{\frac{1}{21} + \frac{1}{3 \cdot 21^3} + \frac{1}{5 \cdot 21^5} + \frac{1}{7 \cdot 21^7} + \text{ꝛc.}\right\}$$

§. 64. Zusatz.

Wollte man den Logarithmen einer Zahl a berechnen, und dabei voraussetzen, daß derjenige der vorhergehenden Zahl a — 1 noch nicht bekannt sey, so setze man $\frac{1+x}{1-x} = a$; diß

$x = \frac{a-1}{a+1}$, und mithin:

§. 65. Aufgabe.

Aus den bekannten Logarithmen zweier unmit[...] einander folgenden natürlichen Zahlen n — 1 und n[...] rithmen der unmittelbar auf sie folgenden dritten, [...] finden.

Auflösung.

Die Annahme $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n^2}{n^2-1}$, giebt x = $\frac{1}{2n^2 ...}$

$$L. \frac{n^2}{n^2-1} = 2\,A \left\{\frac{1}{2n^2-1} + \frac{1}{3\{2n^2-1\}^3} + \frac{1}{5\{2n^2-1 ...}\right.$$

Es ist aber Log. $\frac{n^2}{n^2-1}$ = Log. $\frac{n^2}{\{n+1\}\{n-1\}}$

$$= \text{Log. } n^2 - \text{Log. } \{n+1\}\{n-1\} = ...$$
$$- \text{Log. } \{n-1\} - \{\text{Log. } n+1\}$$

also ist auch

$$2 \text{ Log. } n - \text{Log. } \{n-1\} - \text{Log. } \{n+1\}$$
$$= 2\,A \left\{\frac{1}{2n^2-1} + \frac{1}{3\{2n^2-1\}^3} + \frac{1}{5\{2n^2-1 ...}\right.$$

und

$$\text{Log. } \{n+1\} = 2 \text{ Log. } n - \text{Log. } \{n-1\}$$
$$-2\,A \left\{\frac{1}{2n^2-1} + \frac{1}{3\{2n^2-1\}^3} + \frac{1}{5\{2n^2-1\}^5} + ...\right.$$

Für n = 2, 3, 4, 9 erhalten wir folgende Werthe:

$$\text{Log. } 3 = 2 \text{ L. } 2 \quad -2\,A \left\{\frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \frac{1}{7\cdot ...}\right.$$

$$\text{Log. } 4 = 2 \text{ Log. } 3 - \text{Log. } 2$$
$$- 2 A \left\{ \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5} + \frac{1}{7 \cdot 17^7} + \text{etc.} \right\}$$

oder auch, da

$$\text{L. } 4 = \text{L. } 2 . 2 = \text{L. } 2 + \text{L. } 2 = 2 \text{ L. } 2 . = 2 \text{ L. } 3 - \text{L. } 2$$
$$- 2 A \left\{ \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5} + \frac{1}{7 \cdot 17^7} + \text{etc.} \right\}$$

und also

$$\text{L. } 3 = \frac{3}{2} \text{ L. } 2 + A \left\{ \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5} + \frac{1}{7 \cdot 17^7} + \text{etc.} \right\}$$

$$\text{L. } 10 = 2 \text{ L. } 9 - \text{L. } 8 - 2 A \left\{ \frac{1}{161} + \frac{1}{3 \cdot 161^3} + \frac{1}{5 \cdot 161^5} + \text{etc.} \right\}$$

oder, weil Log. 10 = 1 ; Log. 9 = Log. 3^2 = 2 Log. 3 ; und Log. 8 = Log. 2^3 = 3 Log. 2 ; 1 = 4 Log. 3 − 3 Log. 2

$$- 2 A \left\{ \frac{1}{161} + \frac{1}{3 \cdot 161^3} + \frac{1}{5 \cdot 161^5} + \frac{1}{7 \cdot 161^7} + \text{etc.} \right\}$$

Eben fanden wir aber: Log. 3 = $\frac{3}{2}$ Log. 2

$$+ A \left\{ \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5} + \frac{1}{7 \cdot 17^7} + \text{etc.} \right\}$$

Folglich ist: 4 Log. 3 = 6 Log. 2

$$+ 4 A \left\{ \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5} + \frac{1}{7 \cdot 17^7} + \right\} + \text{etc.}$$

und mithin

$$1 = 3 \text{ Log. } 2 + 4 A \left\{ \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5} + \text{etc.} \right\}$$
$$- 2 A \left\{ \frac{1}{161} + \frac{1}{3 \cdot 161^3} + \frac{1}{5 \cdot 161^5} + \text{etc.} \right\}$$

Da nun (§. 63) Log. 2

$$= 2 A \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.} \right\}$$

$$- 2 A \left\{ \frac{1}{161} + \frac{1}{3 \cdot 161^3} + \frac{1}{5 \cdot 161^5} + \text{etc.} \right.$$

woraus

$$A = \frac{0,50000000 \ldots\ldots}{3 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} \ldots\ldots \right\}}$$

$$+ 2 \left\{ \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5} \ldots\ldots \right\}$$

$$- \left\{ \frac{1}{161} + \frac{1}{3 \cdot 161^3} + \frac{1}{5 \cdot 161^5} \ldots\ldots \right\}$$

folgt, aus welchem Ausdruck sich der Werth von A er oben (§. 61.) angegeben wurde, weit leichter läßt, als durch die daselbst mitgetheilte, sehr weni girende, gewöhnliche Reihe.

§. 66. Zusatz.

Folgende Formeln können, besonders bei Log von sehr großen Zahlen, ebenfalls nützlich seyn.

Es sey $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{a}{b^m}$, so ist $x = \frac{a}{2b^m + a}$

und

$$\text{Log.} \left\{ \frac{1+x}{1-x} \right\} = \text{Log.} \left\{ 1 + \frac{a}{b^m} \right\} = 2A \left\{ \frac{a}{2b^m \ldots} \right.$$

$$+ \frac{a^3}{3\{2b^m + a\}^3} + \frac{a^5}{5\{2b^m + a\}^5} + \text{etc.} \right\}$$

$$- m \, \text{Log.}\, b;$$

so haben wir

$$\text{Log.}\, \{b^m + a\} = m \, \text{Log.}\, b$$

$$+ 2A \left\{ \frac{a}{2b^m + a} + \frac{a^3}{3\{2b^m + a\}^3} + \frac{a^5}{5\{2b^m + a\}^5} \right.$$

Wenn also von einer Zahl N der Logarithme gesucht
zerlege man sie in eine Summe zweier Zahlen $b^m + a$
auch verneint seyn darf, aber gegen b^m so klein als
angenommen werden muß, damit die Brüche

$$\frac{a}{2b^m + a}, \; \frac{a^3}{\{2b^m + a\}^3} \text{ ꝛc.}$$

so klein als möglich werden; so ist z. B. für

$$N = 1001 = 10^3 + 1, \; a = 1, b = 10, m = 3$$

daher

$$\text{L.}\, 1001 = 3 + 2A \left\{ \frac{1}{2001} + \frac{1}{3.2001^3} + \frac{1}{5.2001^5} \right.$$

wo wenige Glieder hinreichen, den Logarithmen von
berechnen.

Eben so ist für $N = 1017 = 1024 - 7 = 4^5 -$

$$\text{L.}\, 1017 = 10 \, \text{L.}\, 2 - 2A \left\{ \frac{7}{2041} + \frac{7^3}{3.2041^3} \right.$$

Auch folgende noch allgemeinere Formel ist sehr beque

Es sey $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{a}{bc^m}$; so ist $x = \frac{a}{2bc^m + a}$,

und

$$\text{Log.}\left\{bc^m + a\right\} = \text{Log. } b + m \text{ Log. } c$$
$$+ 2 A \left\{\frac{a}{2bc^m + a} + \frac{a}{3\{2bc^m+a\}^3} + \text{rc.}\right\}$$

wo a auch negativ seyn darf. Nun läßt sich aber jede Zahl N leicht unter die Form $bc^m \pm a$ bringen, wobei nur diß zu bemerken ist, daß der Theil a gegen bc^m so klein, als möglich seyn müsse.

z. B. für $N = 760091 = 760000 + 91 = 76 . 10^4 + 91$ ist
$$\text{Log. } 760091 = \text{Log. } 76 + 4 \text{ Log. } 10$$
$$+ 2 A \left\{\frac{91}{1520091} + \frac{91^3}{3.1520091^3} + \text{rc.}\right\}$$

Dergleichen Formeln lassen sich nun noch sehr viele ausdenken, um die Logarithmen gegebene Zahlen zu berechnen. Das Wesentliche haben wir hier gezeigt, überlassen die wirkliche Berechnung dem, der sich selbst üben will, und gehen zu andern Betrachtungen über.

H. Einige wichtige Säze und Bemerkungen über die Logarithmen.

§. 67. Saz.

Je größer die Zahlen und je kleiner ihre Unterschiede sind, desto mehr ist es wahr, daß die Unterschiede der Zahlen sich wie die Unterschiede ihrer Logarithmen verhalten.

Beweiß.

Es seyen $x, x+m, x+n$, drei Zahlen von solcher Beschaffenheit, daß nicht nur x sehr groß, sondern auch sowol m als n gegen x so klein sind, daß $\frac{m^2}{x^2}$, $\frac{m^3}{x^3}$ rc. so wie auch

$\frac{n^2}{x^2}$, $\frac{n^3}{x^3}$ 2c. als Brüche angesehen werden können, die nahe an Null gränzen; so behaupte ich, es sey das Verhältniß

$$x+m-x : +n-x = L.\{x+m\} - x : L.\{x+n\} - L.x$$

oder:

$$m : n = Log.\{x+m\} - L.x : Log.\{x+n\} - Log.x$$

der Wahrheit sehr nahe.

Es ist nemlich $L.\{x+m\} - L.x = L.\left\{\frac{x+m}{x}\right\}$

$$= Log.\left\{1+\frac{m}{x}\right\} = A\left\{\frac{m}{x} - \frac{m^2}{2x^2} + \frac{m^3}{3x^3} - \text{2c.}\right\}$$

Da nun nach der Voraussetzung $\frac{m^2}{x^2}$, $\frac{m^3}{x^3}$ 2c. sehr kleine, an Null gränzende Brüche sind, so ist der Werth von $L.\{x+m\} - L.x$ sehr nahe $A\frac{m}{x}$; aus ähnlichem Grunde ist auch $L.\{x+n\} - Log.x$ sehr wenig von $A\frac{n}{x}$ unterschieden.

In diesem Sinne ist also:

$$Log.\{m+x\} - Log.x : Log.\{n+x\} - x = m : n.$$

§. 68. Zusatz.

Da für $m = 1$, und $x = 1000$, $\frac{m^2}{x^2} = \frac{1}{1000000} = 0{,}000001$ ist; so kann man also annehmen, daß für Zahlen, die über 1000, und nur um eine Einheit, oder noch weniger von einander verschieden sind, es wirklich richtig ist, daß sich ihre Unterschiede wie die Unterschiede ihrer Logarithmen verhalten. Eben dieser Satz gilt um so mehr bei Zahlen über 10000, auch wenn ihre Differenz 10 beträgt u. s. w. Von welchem Nutzen derselbe sey, lehren folgende Aufgaben.

§. 69. Aufgabe.

Man nimmt an, die Logarithmen der Zahlen bis auf 10000 seyen bekannt. Man soll aus denselben diejenigen der Zahlen bis 100000 berechnen lehren.

Auflösung.

Man sucht also aus den bekannten Logarithmen aller vierzifferigen Zahlen diejenigen aller fünfzifferigen Zahlen. Zu dem Ende sey N eine gegebene fünfzifferige Zahl, deren Logarithme gesucht wird, und p ihre lezte oder fünfte Ziffer, welche demnach die Einer derselben vorstellt, so läßt sich N auch unter die Form $10B + p$ bringen, wo B eine vierzifferige Zahl bedeutet. Nun seyn 10 B und 10 C diejenigen, nur um einen Zehner verschiedenen, fünfzifferigen Zahlen, zwischen welche $10B + p$ fällt; so läßt sich nach §. 67 und 68 folgende Proportion machen:

$$10\{C - B\} : p = \text{Log. } 10C - \text{Log. } 10B : \text{Log. } N - \text{Log. } 10B$$

aber $C - B$ ist nach der Voraussetzung $= 1$, und

$$\text{Log. } 10C - \text{Log. } 10B = \text{Log. } 10 + \text{Log. } C - \text{Log. } 10 - \text{Log. } B = \text{Log. } C - \text{Log. } B$$

daher haben wir

$$\text{Log. } N = \text{Log. } 10B + p. \left\{\frac{\text{Log. } C - \text{Log. } B}{10}\right\}, \text{ und}$$

$p \left\{\frac{\text{Log. } C - \text{Log. } B}{10}\right\}$ ist diejenige Größe, die man dem Log. 10 B zusetzen muß, um Log. N zu erhalten. Da nun der Logarithme von 10 B, der $= \text{Log. } 10 + \text{Log. } B$ ist, als bekannt angenommen wird, so darf also, die Kennziffer abgerechnet, zu Log. B nur noch die eben erwähnte Größe $p \left\{\frac{\text{Log. } C - \text{Log. } B}{10}\right\}$ addirt werden, um die Mantisse von Log. N. zu bekommen.

Beispiel.

Man sucht die Logarithmen der Zahlen:

35631, 35632, 35633, 35634, 35635, 35636,
35637, 35638, 35639.

Hier haben wir B = 3563, und p = 1, 2, 3, ... 9. Ferner ist C = 3564, daher verwaudelt sich

$$p \left\{ \frac{\text{Log. C} - \text{Log. B}}{10} \right\} \text{ in } \frac{p.\ 0.0001219}{10}.$$

Multiplicirt man daher den Unterschied der Logarithmen von 3564 und 3463, nemlich 0,0001219 nach und nach mit den Werthen von p, oder mit 1, 2, 3..... 9, und dividirt das Product mit 10, so ergeben sich die Grössen:

0,0000122
0,0000244
0,0000366
0,0000488
0,0000609
0,0000731
0,0000853
0,0000975
0,0001097

werden diese zu Log. 10 B, das ist zu 4,5518185 addirt, so ergeben sich die Zahlen:

4,5518280
4,5518402
4,5518524
4,5518646
4,5518768
4,5518890
4,5519011
4,5519133
4,5519255

welches die Logarithmen der fünfzifferiger Zahlen 35631
35632
35633
etc.

sind.

Hiebei wird bemerkt, daß die vier letzten Decimalziffern eines jeden dieser Logarithmen in der Kolumne der fünften Ziffer derjenigen Zahl eingetragen stehen, welcher dieser Logarithme zugehört; so steht z. B. 8890 in der Kolumme der Ziffer 6, uud so ist also nach nach §. 30. der Logarithme von 35636 = 4,5518890, und so auch mit allen übrigen.

Auf die eben gezeigte Art wurden demnach aus den bekannten Logarithmen der 4zifferigen Zahlen die zu 1, 2, 3 etc. auf jeder Seite der Logarithmentabelle gehörigen Kolumnen berechnet, um aus derselben die Logarithmen der 5- und mehrzifferigen Zahlen zusammen zu setzen.

§. 70. Aufgabe.

Aus den bekannten, richtig berechneten, Logarithmen der Zahlen mit 5 Ziffern die Logarithmen deren mit 6 Ziffern zu finden.

Auflösung.

Es sey Q eine Zahl mit 6 Ziffern, deren lezte oder 6te Ziffer 9 ist, und P und Q seyen diejenigen 6zifferigen, auf 0 sich endigenden, und nur um einen Zehner verschiedenen Zahlen, zwischen welche Q fällt, so findet sich, wie in der vorhergehenden Auflösung, daß dasjenige, was man zu den Logarithmen der kleinern Zahl P addiren muß, um den Logarithmen von Q zu erhalten, $= \left\{\frac{\text{Log. R} - \text{Log. P}}{10}\right\} 9$ ist.

Auf diese Art ergeben sich die Proportionaltheile für die sechste

Ziffer Q. Die Logarithmen von P und R sind aber deswegen als bekannt anzusehen, weil sowohl P als R sich mit 0 endigen, und daher nichts anders als 5zifferige mit 10 multiplicirte Zahlen sind, deren Logarithmen eine Summe der Logarithme von 10, und jener 5zifferigen Zahlen sind.

Beispiel.

Man sucht die Logarithmen der zwischen 578960 u. 578970 enthaltenen ganzen Zahlen. Hier ist also P = 578960, und R = 578970;

Daher

$$\text{Log. } R = \text{Log. } 578970 = 5{,}7626561$$
$$\text{Log. } P = \text{Log. } 578960 = 5{,}7626486$$
$$\text{folglich Log. } R - \text{Log. } P = 0{,}0000075$$

Dieser Rest nach einander mit q, oder den Zahlen 1, 2, 3....9 multiplicirt, und sodann mit 10 dividirt, giebt die Werthe:

0,0000007
0,0000015
0,0000022
0,0000030
0,0000037
0,0000045
0,0000052
0,0000060
0,0000067

Es sind also die den Werthen q = 1, 2, 3 ꝛc. entsprechenden Proportionaltheile

P.	P.
1	7
2	15
3	22
4	30
5	37
6	45
7	52
8	60
9	67

wie solche in der Kolumne P. P. stehen. Um diese Theile müssen also die lezten Decimalstellen des Logarithmen von P vermehrt werden, um den von Q zu erhalten.

Will man nämlich den Logarithmen 578964, so ist q = 4, daher wegen Log. P. = Log. 578960 = 5,7626486
und Proportionaltheil 4 = 30

Log. Q oder Log. 578964 = 5,7626516

Diß erläutert die Vorschrift §. 28. N° 5.

§. 71. Aufgabe.

Wenn vorausgesetzt wird, daß in den Tabellen die auf 7 Decimalstellen berechneten Logarithmen der Zahlen von 6 Ziffern und darunter richtig sind, hieraus die Logarithmen der Zahlen von 7 Ziffern zu finden.

Auflösung.

N sey diejenige Zahl mit 7 Ziffern, deren Logarithme gesucht wird, q sey ihre 6te, und r ihre 7te Ziffer. Ferner seyen M und O diejenigen auf zwei Nullen sich endigenden, und nur nur um Einen Hunderter von einander unterschie-

denen Zahlen, zwischen welche N fällt. Eben diese Zahlen M, N, O ihrer 7ten Ziffer beraubt, seyen:

P, Q, R.

und also eben dieselben, die in der vorhergehenden Auflösung betrachtet worden sind. Diß vorausgesetzt, so ist, da M = 10 P, und O = 10 R angenommen werden,

Log. O = 1 + Log. R,

Log. M = 1 + Log. P, und insofern N zwischen O und M fällt:

Log. N = 1 + Log. P + x.

Da nun hier von sehr großen Zahlen die Rede ist: so haben wir nach §. 67. u. 68.:

$$\text{Log. } O - \text{L. } M : \text{Log. } N - \text{Log. } M = 100 : 10q + r;$$

mithin auch

$$\text{Log. } R - \text{Log. } P : x = 100 : 10\,q + r;$$

daher

$$x = \left\{\frac{\text{Log. } R - \text{Log. } P}{10}\right\} q + \frac{1}{10} \left\{\frac{\text{L. } R - \text{L. } P.}{10}\right\}. r$$

Wir haben also:

$$\text{Log. } N = 1 + \text{Log. } P$$

$$+ \left\{\frac{\text{Log. } R - \text{Log. } P}{10}\right\} q + \frac{1}{10} \left\{\frac{\text{Log. } R - \text{Log. } P}{10}\right\} r.$$

Es bildet sich also der Logarithme der siebenzifferigen Zahl N

1) Aus dem Logarithmen der siebenzifferigen, in 00 sich endigenden Zahl M, das ist: die Kennziffer abgerechnet, aus den Mantissen des Logarithmen, der den 5 ersten Ziffern von N entspricht. Diß bezeichnet die Summe von 1 + Log. P.

3) Aus dem $\frac{1}{10}$ Theil des zur 7ten Ziffer von N

Proportionaltheils $\frac{1}{10} \left\{ \frac{\text{Log. R} - \text{Log. P}}{10} \right\} . \text{r}$

Dieß leztere ist also der Grund, warum man bei Ziffer der Zahl N nochmals zu der Kolumne P. P zu und nach der Vorschrift des §. 28. N° 6 von der zu gen Zahl die lezte Stelle abschneidet, das übrige aber gänzung des Log. N noch beifügt.

§. 72.

Die von §. 67 — 71 vorgetragenen Wahrheiten e die Aufschlüsse und Erläuterungen zu den oben §. 28. gegebenen praktischen Vorschriften des Aufsuchens der L men in den Tabellen, nebst Erklärung der Einrichtun lezteren.

Uebrigens durften nicht von allen Zahlen die Logar so mühsam gesucht werden, als die vorhergehenden den angeben: sondern nur von den Primzahlen. nemlich eine Zahl aus Faktoren besteht, so findet sich §. 35, ihr Logarithme, indem man die Logarithmen Faktoren addirt; so ist z. B. Log. 6 = Log. 2. 3 = + Log. 3. Kennt man also einmal die Logarithmen und 3, so giebt ihre blose Addition den Logarithmen v Eben so ist Log. 12 = Log. 2. 2. 3 = 2 Log. 2 + L u. s. w. Dieser Vortheil, um anwendbar zu seyn, setz

voraus, daß man die Faktoren einer gegebenen Zahl kenne, wozu bei großen Zahlen eigene Tabellen erforderlich sind.

§. 73. Satz.

Die Logarithmen negativer Zahlen sind bei jedem zum Grund gelegten Systeme positiver Glieder der geometrischen Progression unmögliche Größen.

Beweiß.

Wenn die Glieder der ursprünglichen geometrischen Progression alle positiv angenommen werden, so sind es auch diejenigen aller abgeleiteten Progressionen. Verlangen, daß negative Zahlen Logarithmen haben sollen, heißt also verlangen, daß negative Glieder sich unter den, aus lauter positiven Gliedern einer geometrischen Progression bestehenden sollen befinden, welches einen offenbaren Widerspruch in sich schließt. Dieser wird mit andern Worten auch also ausgedruckt, daß die Logarithmen negativer Größen unmöglich seyen. Es ist also Log. — a eben sowol, und in eben dem Sinne das Zeichen der Unmöglichkeit, als die Quadratwurzel aus einer negativen Größe.

§. 74. Zusatz.

Der Logarithme von Null ist das negative Unendliche: denn Null kann angesehen werden als die Gränze des Bruchs $\frac{1}{\infty}$. Also ist $\text{Log. } 0 = \text{Log. } \frac{1}{\infty} = \text{Log. } 1 - \text{Log. } \infty = - \text{Log. } \infty$, wo bekanntermaßen ∞ das Zeichen des Unendlichen ist. Dieß erhellet auch aus der Betrachtung eines rückwärts fortgesetzten logarithmischen Systems: z. B.

$$\ldots\ldots \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}\ 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 \text{ ꝛc.}$$

$$\ldots - 4\alpha, -3\alpha, -2\alpha, -\alpha\ 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 5\alpha, 6\alpha \text{ ꝛc.}$$

wo man in der geometrischen Progression zwar, linker Hand zu, auf immer kleinere Brüche $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$ ꝛc. kommt, aber gleichwol nie die Null wirklich erreicht. Diesem unerreichbaren Ziele kann in der Reihe $-\alpha$, -2α, -3α ꝛc. keine andere Zahl korrespondiren, als die größte mögliche, das heißt $-\infty$.

§. 75. Lehrsatz.

Die mitlere geometrische Proportionalgröße zwischen a^m und a^n ist $a^{\frac{m+n}{2}}$; denn wenn diese x ist, so hat man $a^m : x = x : a^n$, also $x^2 = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, folglich $x = a^{\frac{m+n}{2}}$.

§. 76. Satz.

Jedes beliebige ursprüngliche logarithmische System, bei welchem Log. $1 = 0$ ist, läßt sich auf ein solches bringen, in welchem die Exponenten der Glieder der geometrischen Progression den correspondirenden Gliedern der arithmetischen gleich sind.

Beweiß.

Das ursprüngliche System sey

1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 ꝛc.

0, α, 2α, 3α, 4α, 5α ꝛc.

wo der obern Reihe jede mit 1 anfangende geometrischen, der untere aber jede mit 0 anfangende arithmetische Progression vorstellt. Setzt man nun $a = A^\alpha$, wo $A = \sqrt[\alpha]{a}$, so verwandelt man hiedurch das angenommene System in

A^0, A^α, $A^{2\alpha}$, $A^{3\alpha}$, $A^{4\alpha}$ ꝛc.

0, α, 2α, 3α, 4α ꝛc.

in welchem die Exponenten der Glieder der geometrischen Progression gleich den korrespondirenden Gliedern der arithmetischen sind.

§. 77. Satz.

Logarithmen können auch als Exponenten des Nenners der ursprünglichen geometrischen Progression angesehen werden, und zeigen die Potenz an, in welche man diesen Nenner erheben muß, um die verschiedenen Zahlen, denen sie zugehören, hervorzubringen.

Beweiß.

Das ursprüngliche logarithmische System, nach §. 76 behandelt, sey

$$A^0,\ A^\alpha,\ A^{2\alpha},\ A^{3\alpha},\ A^{4\alpha}\ \text{ꝛc.}$$
$$0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ 4\alpha\ \text{ꝛc.}$$

so ist hier von selbst klar, daß die Exponenten des Nenners A mit den korrespondirenden Logarithmen identisch sind. Indem man nun aus diesem System das erste abgeleitete (§. 11) bildet, sucht man zwischen je zwei Gliedern der geometrischen Progression mitlere geometrische, und zwischen je zwei Gliedern der arithmetischen mittlere arithmetische Proportional-Zahlen. Das erste geschiehet, nach dem vorhergehenden Lehrsatz, wenn man die Exponenten des Nenners in jenen zwei Gliedern addirt, und die Summe halbirt; und das andere, wenn man die korrespondirenden, den erwähnten Exponenten gleiche Glieder der arithmetischen Progression addirt, und die Summe halbirt. Folglich sind auch in dem ersten abgeleiteten System die Exponenten des Nenners der verschiedenen Glieder der geometrischen Progression den korrespondirenden Gliedern der arithmetischen gleich. Eben diß gilt auch von allen folgenden abgeleiteten Systemen, mithin auch von demjenigen, von dem alle Zahlen als Glieder seiner geometrischen Progression angesehen werden können.

Diß ist der gewöhnliche Beweiß des Satzes, d[...] garithme eines Produkts der Summe der Logari[...] Faktoren gleich sey. Es scheinen aber hier die bei [...] zum Grund liegenden Prämissen von ursprünglichen [...] leiteten Progressionen deutlicher, als gewöhnlich ni[...] schehen pflegt, entwickelt zu seyn.

I. Anwendung der Logarithm[...]

1) Auf Beispiele der gemeinen Rechenkunst.

§. 79.

Obgleich die gewöhnliche Rechenkunst der Log[...] gänzlich entbehren kann, so leisten sie doch bei große[...] plikationen und Divisionen demjenigen wesentliche [...] dem es nicht gleichgültig ist, ob er etwas, das vi[...] und lange Zeit erfordert, mit weniger Mühe und in [...] kürzerer Zeit zu Stande bringt. Folgende Beispiele [...] diß bekräftigen.

§. 80.

1. Beispiel.

Man sucht das vierte Glied folgender Proportion:

$$7905863 : 3985246 = 900857 : x.$$

Anstatt nun die mittleren Glieder zu multipliciren, und das Produkt durch das erste zu dividiren, addire man die Logarithmen von jenen, und ziehe von der Summe den Logarithmen von diesem ab.

Es ist nemlich:

	Log. 3985246	=	6,6004501
			44
			6
	Log. 900857	=	5,9546525
			34
			12,5551110
subtr.	Log. 7905863	=	6,8979493
	Log. x	=	5,6571617
Also	x	=	454110,6

2. Beispiel.

Was ist das Resultat folgender Multiplikation und Division.

$$x = \frac{7956 . 1357983 . 95432}{96602 . 5135742}$$

	Log. 7956	=	3,9006948
	Log. 1357983	=	6,1328946
	Log. 95432	=	4,9796940
Dec. Ergänz.	Log. 96602	=	5,0150139
Dec. Ergänz.	Log. 5135742	=	3,2893968
			23,3176941
Hievon 2 Zehner abgezogen . .			20
	Log. x	=	3,3176941
	x	=	2078,232..

Wenn man die Decimalbrüche des Nenners mit vielen des Zählers auf einerlei Benennung bringt, sich ihre Ziffern als ganze Zahlen betrachten, und

$$x = \frac{17{,}35492 \cdot 8544367 \cdot 54219}{565942 \cdot 100005 \cdot 123590}$$

Nun ist

Log.	17,35492	=	1,2394221
Log.	8544367	=	6,9316800
Log.	54219	=	4,7341515
Decad. Ergänz. Log.	565942	=	4,2472281
Dec. Ergänz. Log.	100005	=	4,9999784
Dec. Ergänz. Log.	123590	=	4,9080167
			27,0604768
Hievon 3 Zehner oder 30 abgezogen			30
bleibt übrig Log.	x	=	−2,9395232
also (nach §. 56)	x	=	0,0011494

4. Beispiel.

Wenn der Pariser Fuß in 14400 gleiche Theil[e] wird, so hat der rheinländische 13913, und der Wi[rtember]gische 12680 dergleichen Theile. Man fragt wie viel rheinländische Quadratfuß im Wirtembergischen betrag[en]

Es ist

$$1 \text{ Rh. Fuß} : 1 \text{ Wirt. Fuß} = 13913 : 12680$$

also auch

$$1 \text{ Rh. Quad. F.} : 1 \text{ Wirt. Qu. F.} = 13913^2 : 12680^2;$$

daher

$$12680^2 \text{ Rhein. Qu. F.} = 13913^2 \text{ Wirt. Quad. Fuß.}$$

Folglich:

$$12680^2 \text{ Rh. Quad. Fuß} : 263197 \text{ Rhein. Quad. Fuß} = 13913^2 \text{ Wirt. Q. F} : x \text{ Würt. Qu. F.}$$

Also $x = \frac{263197 \cdot 13913^2}{12680^2}$.

Nun ist:

	Log. 263197	=	5,4202810
Log. 13913^2 oder 2	Log. 13913	=	8,2868416
			13,7071226
subtrah. 2	Log. 12680	=	8,2062386
	Log. x	=	5,5008840
	x	=	316872,1

5. Beispiel.

7349 $\frac{24}{67}$ Scheffel Frucht werden gegen Wein vertauscht. Der Scheffel gilt 9 $\frac{43}{60}$ Gulden rheinisch, und der Aimer Wein 67 $\frac{13}{59}$ dergleichen Gulden. Wie viel Aimer wird man erhalten? Es sey y der Preis der zu vertauschenden Frucht, und x die unbekannte Anzahl Aimer: so ist

1 Scheffel : 7349 $\frac{24}{67}$ Scheffel = 9 $\frac{43}{60}$ Gulden : y Gulden;
und x Aimer : 1 Aimer = y Gulden : 67 $\frac{13}{59}$ Gulden.

x : 7349 $\frac{24}{67}$ = 9 $\frac{43}{60}$: 67 $\frac{13}{59}$.

also

$$x = \frac{492407 \cdot 583 \cdot 59}{60 \cdot 67 \cdot 3966.}$$

Nun ist	Log.	492407	= 5,6923242
	Log.	583	= 2,7656686
	Log.	59	= 1,7708520
	Dec. Erg. Log.	60	= 8,2218487
	Dec. Erg. Log.	67	= 8,1739254
	Dec. Erg. Log.	3966	= 6,4016473
			33,0262662
Hievon 3 Zehner oder 30 abgezogen,			30
bleibt:	Log. x		= 3,0262662
	und x		= 1062,346

6. Beispiel.

Eine Summe von 934763,9 fl., die zu $5\frac{1}{3}$ pro Cent angelegt ist, nach $7\frac{3}{97}$ Jahren verfallen. Was ist ihr baarer Werth in Dukaten das Stück zu 5 fl. 23 kr. rheinisch.

Da zu 100 fl. in einem Jahre $5\frac{1}{3}$ fl. Zins kommen, so kommen zu dieser Summe in $7\frac{3}{97}$ Jahren $5\frac{1}{3} \cdot 7\frac{3}{97}$ oder $37\frac{145}{291}$ fl. Es wachsen also 100 fl. binnen dieser Zeit auf $137\frac{145}{291}$ fl. an. Es sind daher auch $137\frac{145}{291}$ fl. $7\frac{3}{97}$ Jhre vor ihrer Verfallzeit nur baare 100 fl. werth. Wenn also y die gesuchte Zahl in Gulden, und x die in Dukaten ist, so haben wir:

$$137\tfrac{145}{291} : 100 = 934763{,}9 : y,$$

und

$$\begin{array}{ccccc} x & : 1 & = & y & : 5\frac{23}{60} \\ \hline \frac{40012}{291}\,x & : 100 & = & 934763{,}9 & : \frac{323}{60} \end{array}$$

also

$$\frac{40012}{291} \cdot \frac{323}{60}\, x = 93476390$$

und

$$x = \frac{60 \cdot 291 \cdot 93476390}{323 \cdot 40012}$$

Es ist aber

Log.	60	= 1,7781513
Log.	291	= 2,4638930
Log.	93476390	= 7,9707019
Dec. Erg. Log.	323	= 7,4907975
Dec. Erg. Log.	40012	= 5,3978097
		25,1013534
Hievon 2 Zehner oder 20 abgezogen		20
	Folglich Log. x	= 5,1013534
	und x	= 126285,4..

§. 81.

Auf ähnliche Art lassen sich alle Aufgaben der einfachen und zusammengesetzten Regel De-Tri; kurz jede Rechnung, wo weitläufige nicht zu vermeidende Multiplikationen nnd Divisionen vorkommen, behandeln. Dabei wird man immer besser zukommen, sogar wenn man sich der mechanischen geistlosen sogenannten Reesischen Rechnung bedienet, als wenn am Ende des Ansatzes die sich nicht aufhebenden großen Zahlen wirklich multiplicirt und dividirt werden müßten.

Anwendung der Logarithmen.

2) Auf die Erhebung in Potenzen.

§. 82.

Die Anwendung der Logarithmen auf die Erhebung der Zahlen in Potenzen gründet sich darauf, daß, wenn $y = x^m$

gleichwol dieses Kapitel von der äussersten Wicht
wie die Folge lehren wird, diejenigen Fälle sehr
kommen, wo in Potenzen erhobene Grössen in
enthalten sind, die ohne Logarithmen nicht wohl z
wären. Ueberdiß sind die meisten Ausdrücke die
solcher Beschaffenheit, daß die in denselben enthal
Potenzen durch Division großer Zahlen oder an
Potenzen wieder vermindert werden. Die merk
nützlichsten Aufgaben erfordern selten Zahlen von a
licher Größe.

§. 83.

1. Beispiel.

Man sucht die 8te Potenz von 7, oder den Werth von

Es ist also Log. y = 8 Log. 7

Nun ist aber Log. 7 = 0,84509

also 8 Log. 7 = 6,76078

und daher y = 57648

2. Beispiel.

Was ist der Werth folgenden Ausdrucks?

$$y = \frac{37973 \left\{\frac{21}{20}\right\}^{50}}{\left\{\frac{31}{30}\right\}^{63\frac{1}{2}}}$$

$$\text{Log. } \tfrac{21}{20} = 0{,}0211893$$
$$50 \text{ Log. } \tfrac{21}{20} = 1{,}0594650$$
$$\text{Log. } 37973 = 4{,}5794749$$
$$\overline{5{,}6389399}$$
$$\text{Subtr. } \tfrac{127}{2} \text{ L. } \tfrac{31}{30} = 0{,}9042654$$
$$\text{Log. } y = 4{,}7346745$$
$$\text{und } y = 54284{,}33..$$

3. Beispiel.

Man sucht die Summe S dieser geometrischen Prog
$\text{Log. } 17 + \{\text{Log. } 17\}^2 + \{\text{Log. } 17\}^3 \ldots\ldots\ldots + \{\text{Log.}$
Diese Summe

$$S = \frac{\{\text{Log. } 17\}^{25} - \text{Log. } 17}{\text{Log. } 17 - 1} = \text{L. } 17 \left\{ \frac{\{\text{L. } 17\}^{2}}{\{\text{L. } 17} \right.$$

Man suche zuerst $\{\text{Log. } 17\}^{24} = z$, also:

Es ist $\text{Log. } z = 24 \text{ Log. Log. } 17$

Nun ist $\text{Log. } 17 = 1{,}2304489$

Daher $\text{Log. Log. } 17 = 0{,}0900635$

und $24 \text{ L. L. } 17 = \text{Log. } z = 2{,}1615240$

Folglich $z = 145{,}0521$

Es ist demnach $S = \dfrac{144{,}0521 . \text{Log. } 17}{\text{Log. } 1{,}7}$,

welcher Ausdruck abermal mit Logarithmen also bea
wird:

Log. S = 2,8860084
Also S = 769,1454

Es ist zu bemerken, daß, da Log. 17 — 1 =
— L. 10 = Log. $\frac{17}{10}$ = Log. 1, 7 ist, Log
= — 1 + 0,3625747 gefunden wird, wo die C
am Ende gesetzt ist. Da sich nun beim Subtrahiren
+ und — in die entgegengesetzten verwandeln, so
den Log. Log. 1, 7 subtrahiren eben so viel, als — 0
+ 1 zu der darüber befindlichen Zahl addiren.
Resultat würde man auch erhalten haben, wenn man
1,7 = — 1 + 0,3625747 = — 0,6374253
Zahl subtrahirt: d. i. + 0,6374253 zu derselben ad

4. Beispiel.

a und b sind bekannte Zahlen. Man sucht d
nenten x in der Gleichung $a^x = b$.

Auflösung.

Es ist x Log. a = Log. b;

also $x = \frac{\text{Log. b}}{\text{Log. a}}$.

5. Beispiel.

Wenn $a^{b^x} = c$ werden soll, wie groß ist x?

so ist

$$x = \frac{\text{Log.}\,\frac{\text{Log. c}}{\text{Log. a}}}{\text{Log. b}} = \frac{\text{Log. Log. c} - \text{Log. Log}}{\text{Log. b}}$$

6. Beispiel.

Man habe $\{\text{Log. x}\}^m = b$, wo x gesucht wird.

Auflösung.

Es ist $m\,\text{Log. Log. x} = \text{Log. b}$, also $\text{Log. Log. x} =$

Es sey C die Zahl, die dem Logarithmen $\frac{b}{m}$ entspricht,

$\text{Log. C} = \frac{b}{m}$, so ist $\text{Log. x} = C$;

und $x = \text{Numer. Log. C}$

oder x ist diejenige Zahl, deren Logarithmus C ist.

§. 84.

Man übe sich noch an folgenden Beispielen:

1) $y = 13^{\text{Log. } 5476}$

2) $y = \{\text{Log. } 1{,}74329\}^{28\frac{3}{5}}$

3) $y = \{\text{Log. } 39{,}5006\}^{15}$

F

"Quadratwurzel aus $9407\frac{1}{35}$ vorgestellt
stark war demnach die zu diesem Ang
Mannschaft?

Anwendung der Logarith

3) Auf die Ausziehung der Wurzeln.

§. 85.

So leicht die Ausziehung der Quadratwurzeln
wickelt werden die Vorschriften für die Auszieh
Wurzeln, indem schon die Cubikwurzel Anfänger
macht, und in jedem Falle noch mehr zu rechnen
Logarithmen bieten nun ein sehr leichtes Mittel
Wurzel auszuziehen, das zwar bei Quadratwurz
überflüssig, aber bei höhern unentbehrlich und
einfach ist. Der Grund des Verfahrens wurde b
gelehrt, woselbst wir zeigten, daß für $x = \sqrt[m]{a}$,
$\frac{1}{m}$ Log. a sey. Wenn daher aus irgend einer Grö
Wurzel gezogen werden soll, so suche man den
von a, dividire ihn durch die Zahl m, so ist der Q
Logarithme der gesuchten Wurzel, und mithin die
Tabellen correspondirende Zahl die verlangte Wurz

§. 86.

1. Beispiel.

Man verlangt die Quadratwurzel aus 7.

Auflösung.

Hier ist a = 7, und m = 2.

Nun ist $\text{Log. } a = \text{Log. } 7 = 0{,}8450980$

$\text{Log. } x = \frac{1}{m} \text{ Log. } a = \frac{1}{2} \text{ Log. } 7 = 0{,}4225490$

mithin $x = 2{,}645751$

2. Beispiel.

Was ist die dritte, oder Kubikwurzel aus 19,385.

Auflösung.

Da hier a = 19,385, und m = 3, so haben wir:

$\text{Log. } 19{,}385 = 1{,}2874658$

$\text{Log. } x = \frac{1}{3} \text{ Log. } 19{,}385 = 0{,}4291552$

mithin $x = 2{,}686304$

3. Beispiel.

Was ist die 13te Wurzel aus 8,57793.

Auflösung.

$\text{Log. } 8{,}57793 = 0{,}9333825$

$\text{Log. } x = \frac{1}{13} \text{ Log. } 8{,}57793 = 0{,}0717986$

folglich $x = 1{,}179772$

4. Beispiel.

Was ist der Werth von $y = \sqrt[7]{\{2 + \sqrt[5]{(2 + 37\sqrt[3]{2})}\}}$.

Hier wird die Berechnung also angestellt:

mithin	$37 \sqrt[3]{2}$	$= 46{,}61707$
addirt		2
		$48{,}61707$

$$\text{Log. } 48{,}61707 = 1{,}6867888$$

$$\tfrac{1}{5} \text{ Log. } 48{,}61707 = 0{,}3373577$$

mithin $\text{Log. } \sqrt[5]{\{2 + 37 \sqrt[3]{2}\}} = 0{,}3373577$

$$\sqrt[5]{\{2 + 37 \sqrt[3]{2}\}} = 2{,}174491$$

addirt 2

$$2 + \sqrt[5]{\{2 + 37 \sqrt[3]{2}\}} = 4{,}174491$$

$$\text{Log. } 4{,}174491 = 0{,}6206036$$

$\text{Log. } y = \tfrac{1}{7} \text{ Log. } 4{,}174491 = 0{,}0886576$

und $y = 1{,}226471$

§. 87.

Man übe sich noch ferner an folgenden Beispiele

1) $y = \dfrac{\sqrt[2]{1793} \cdot \sqrt[3]{985{,}63^2}}{\sqrt[23]{769872^3}}$

2) $y = \sqrt[2]{\{5 + \sqrt[3]{(17 + 4\sqrt[4]{9})}\}}$

3) $y = \sqrt[2]{\{2 + \sqrt{(2 + \sqrt{[2 + \sqrt{(2+\sqrt{}}}}}$

4) Wie verhält sich die 17te Wurzel aus 2700 19ten Wurzel aus 3864279.

5) Die wie vielte Wurzel aus 5739,005 ist 1,00058.

so erhalte ich eine Zahl, deren b
Ziffern, als eine ganze Zahl betrachtet, mit der
multiplicirt, die Anzahl meiner Thaler ausdrücken
viel Thaler hatte er also?

Anwendung der Logarithmen.

4) Auf die Berechnung der Zeitrenten.

§. 88.

In keinem Theile der Rechenkunst ist der Nutzen d
garithmen sichtbarer, und diese Lehre selbst unentbehr
als in demjenigen, der von den Zeitrenten handelt. Dah
diese so wichtige Materie, deren schönste und nützlichste
den schon längst unsern Lehrbüchern hätten einverleibt
sollen, hier etwas ausführlich abhandeln wollen.

§. 89. Definition.

Zeitrente nennt man jede, nach einer Anzahl gl
Zwischenzeiten, zahlbare Summe.

Ist diese Zwischenzeit ein Jahr, ein halbes Jahr
Vierteljahr, ein Monat u. s. w., so heißt die Zeitrente
Jahr- Halbjahr- Vierteljahr- Monatrente.

Eine unveränderliche Zeitrente ist eine solche,
jedem Termin dieselbe bleibt.

änderliche Jahresrente.

C muß dem D alle Vierteljahre, 10 Jahre nach ei
20 Thaler bezahlen; diß ist eine unveränderliche Viert
rente.

E giebt dem F 12 Jahre nacheinander am Ende de
Jahrs 10 Thaler, des zweiten 20, des dritten 30 u.
nemlich in jedem folgenden Jahre 10 Thaler mehr,
vorhergehenden. E zahlt also eine veränderliche Jah

§. 90. Anmerkung.

Zeitrenten und Leibrenten sind nicht einerlei. B
ist die Zeit ihrer Dauer genau bestimmt; bei dieser hän
selbe von der ungewissen Lebenslänge eines oder mehrer
schen ab. Irrig nahm man ehemals den Satz an, d
renten seyen Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer.
serm gegenwärtigem Zwecke gehören nur die Zeitrenten

§. 91. Definition.

Der jährliche / halbjährliche / vierteljährliche } Zinsfuß
2c.
ist das nun seiner jährlichen / halbjährlichen / vierteljährlichen } Zins 2c.

nerhalb einer gewissen Zeit anwächset.

§. 92. Zusatz.

Wenn man weiß, was der jährliche Zins von 100 ist, ist der jährliche Zinsfuß leicht zu finden. Denn wenn die Zins von 100 gleich a ist, so ist der jährliche Zins von 1 gle $\frac{a}{100}$, und mithin der jährliche Zinsfuß $= 1 + \frac{a}{100}$. Zukunft heiße derselbe r, daher ist $r = 1 + \frac{a}{100}$, und h wiederum $a = 100 \{ r - 1 \}$. So ist z. B. für $a =$ d. i. für 5 pC., $r = 1{,}05$.

Die Folge wird lehren, daß es bequemer ist, den Zinsfuß die Rechnung einzuführen, als sich der Procente zu bediene

§. 93. Definition.

Das Grundkapital, in Zukunft immer p, ist diejeni Summe, deren jährlicher Zins 1 ist. Hieraus folgt, d $1 : r - 1 = p : 1$, und mithin $p = \frac{1}{r-1}$ sey: au ist $r = 1 + \frac{1}{p}$.

§. 94. Aufgabe.

Ein Kapital C werde für den jährlichen Zinsfuß r derg stalt in Zins gelegt, daß die am Ende eines jeden Jahrs ve fallenen Zinsen im Augenblick der Verfallzeit wieder zum K pital geschlagen werden. Wie hoch wird dieses Kapital na Verfluß von m Jahren mit seinen Zinsen und Zinseszins anschwellen.

$1 : r = C^{(1)} : C^{(2)}$

$1 : r = C^{(2)} : C^{(3)}$

....

....

$1 : r = C^{(m-1)} : C^{(m)}$

$1 : r^m = C, C^{(1)}, C^{(2)} \ldots C^{(m-1)} : C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)} \ldots C^{(m-}$

oder

$1 : r^m = C : C^{(m)}$

daher ist

$C^{(m)} = C\, r^m$

§. 95. Zusatz.

Die eben gefundene Formel en hält vier Auflösunge nachdem von den vier Größen C, $C^{(m)}$, r, m, drei ge und die vierte daraus gesucht wird. Es ist nemlich

$$1)\ C^{(m)} = Cr^m.$$

$$2)\ C = \frac{C^{(m)}}{r^m}$$

$$3)\ \text{Log. } r = \frac{\text{Log. } C^m - \text{Log. } C}{m}$$

$$4)\ m = \frac{\text{Log. } C^{(m)} - \text{Log. } C}{\text{Log. } r}$$

Die Gleichung N° 1 giebt an, wie hoch, nach m Ja bei dem angenommenen Zinsfuß r ein Kapital C mit Zinsen und Zinseszinsen anwachse.

Die Gleichung N° 2 zeigt, welches Kapital in m Jahren und bei einem bekannten Zinsfuß r mit Zinsen und Zinseszinsen auf die bekannte Summe $C^{(m)}$ anwachsen werde; oder es ist auch C der baare Werth einer nach m Jahren für den Zinsfuß r verfallenen Summe $C^{(m)}$, wenn Zinse von Zinsen gerechnet werden.

Die Gleichung N° 3 lehrt, aus der anfänglichen Summe C, und derjenigen, auf die sie, durch ihre Zinsen und Zinseszinse vermehrt, nach m Jahren angewachsen, den Zinsfuß r berechnen.

Endlich findet man durch die Gleichung N° 4, nach wie viel Jahren ein gegebenes Kapital C, bei einem gegebenen Zinsfuß r, mit Zinsen und Zinseszinsen auf eine gleichfalls gegebene Summe $C^{(m)}$ anwachse.

§. 96. Zusatz.

Wenn man, vermittelst der Gleichung N° 2, nach welcher $C = \frac{C^{(m)}}{r^m}$ ist, aus $C^{(m)}$ den baaren Werth eines Kapitals C sucht, das nach m Jahren, für den Zinsfuß r, auf die bekannte Summe $C^{(m)}$ anwachsen würde, so heißt diß auch die Summe $C^{(m)}$ auf m Jahre zurück discontiren.

Wenn also S eine gewisse bestimmte Summe bedeutet, so ist dieselbe:

auf 1 Jahr	zurückdiscontirt			$\frac{S}{r}$
= 2	=	=	=	$\frac{S}{r^2}$
= 3	=	=	=	$\frac{S}{r^3}$
m	=	=	=	$\frac{S}{r^m}$

In vorhergehender Auflösung wurden die Termine verfallenen Zinses, und also auch der Zinsfuß jährlich a nommen. Wären aber diese Termine halbjährige, vierte rige, oder überhaupt $\frac{1}{n}$ jährliche, und der Zinsfuß ϱ, so m durch eben die Schlüsse, die bei jener Auflösung gebra wurden, folgen, daß ein Kapital C nach n solchen Term auf $C\varrho^n$ mit seinen Zinsen und Zinseszinsen anschw würde. Nun machen aber n dergleichen Termine 1 J $C\varrho^n$ ist also der Werth von C nach Verfluß eines Jahrs, $C\varrho^{mn}$ derjenige nach Verfluß von m Jahren.

Auf diese und die vorhergehende Formeln beziehen sich gende Beispiele:

§. 98.

1. Beispiel.

Es legt jemand ein Kapital von 3755 Thalern mit Bedingung auf Zinse, daß am Ende eines jeden Ja die Zinse wieder zum Kapital geschlagen werden. Wen nun 5 pCt. erhält; wie hoch wird nach 37 Jahren das o Kapital anschwellen?

Auflösung.

Für diesen Fall paßt die Formel des Zusatzes §. 95 N nach welcher $C^m = C r^m$ ist. Da nun hier $C = 3755$, r 1,05 und $m = 37$, so ist die Rechnung folgende:

Es wachsen demnach, unter den angeführten Bedingun-
die 3755 Thaler in 37 Jahren auf 22835,68 Thaler an

2. Beispiel.

A ist dem B von jetzt an nach 9 Jahren die Summe
8342 Thlrn schuldig. B möchte aber gleich jetzt baar be-
werden, und läßt sich gefallen, daß Zins von Zinsen gere-
werden. Dabei ist der jährliche Zinsfuß $4\frac{1}{2}$ pCt.,
r = 1,045. Wie viel kann B von A verlangen?

Auflösung.

Hier werden nach Zusatz §. 95 N° 2 die 8342 Thaler
9 Jahre zurück discontirt, und der gesuchte baare Werth

$$\frac{C^{(m)}}{r^m}, \text{ oder } \frac{8342}{1{,}045^9}.$$

Nun ist:

$$\text{Log. } 8342 = 3{,}9212702$$

$$\text{ferner Log. } 1{,}045^9 \text{ oder } 9 \text{ Log. } 1{,}045 = 0{,}1720467$$

$$\text{Log. } C = 3{,}7492235$$

$$\text{also } C = 5613{,}366$$

A giebt also dem B baare 5613,36 Thaler; denn
Summe würde nach 9 Jahren, bei dem Zinsfuß $4\frac{1}{2}$, mit
sen und Zinseszinsen auf die schuldige 8342 Thaler anwac-
Bei einfachen Zinsen müßte A dem B baare 5937,7 Th-
geben.

fluß von 20 Jahren war das Ganze auf 892,3 Thaler wachsen. Was war der Zinsfuß?

Auflösung.

Nach Zusatz §. 95 N° 3 ist hier

$$\text{Log. } r = \frac{\text{Log. } C^{(m)} - \text{Log. } C}{m} = \text{Log. } \frac{892{,}3 - \text{L}}{20}$$

Nun ist: Log. 892,3 = 2,9505109
Log. 288 = 2,4563660

also: Log. 892,3 — Log. 286 = 0,4941449
daher:

$$\text{L. } r = \tfrac{1}{20}\{\text{L. } 892{,}3 - \text{L. } 286\} = 0{,}0247072$$

und

$$r = 1{,}0585$$

also wurde diß Geld nahe an 6 pCt. untergebracht.

4. Beispiel.

Eine Summe von 12000 Thalern, zu 4 pCt. auf jäh Zinsen gelegt, wuchs mit Zins und Zinseszinsen, auf 39. Thlr. an. Wie lange ist sie in Zins gestanden?

Auflösung.

Nach Zusatz §. 95 N° 4 haben wir für diesen Fall

$$m = \frac{\text{Log. } C^{(m)} - \text{Log. } C}{\text{Log. } r}.$$

Log. 12000 = 4,0791812

$$0{,}5183736$$

Log. 1,04 = 0,0170333

folglich

$$m = \frac{5183736}{710333}$$

aber

Log. 5183736 = 6,7146429

und Log. 170333 = 5,2312988

also Log. m = 1,4833441

mithin m = 30,432

Es geschah also, bei dem angenommenen Zinsfuß, Anwachs des Kapitals 12000 auf 39587,2 Thaler inn 30 Jahren $5\frac{1}{10}$ Monat.

Hieher gehört auch noch folgende Aufgabe:

§. 99. Aufgabe.

Man soll bestimmen, nach wie viel Jahren, bei gegebenen Zinsfuß, ein Kapital, dessen jährliche Zin Zinseszinse wieder zum Kapital geschlagen werden, sich v pele, verdreifache, oder überhaupt auf eine μ mal g Summe, als es anfangs ist, anwachse?

Auflösung.

Die Zahl dieser Jahre sey x. Da nun überhaupt C b jährlichen Zinsfuß r nach m Jahren sich in $C^{(m)} = C r^{(m}$

$$x = \frac{\text{Log.}\,\mu}{\text{Log.}\,r}$$

Fragt man z. B. nach wie vielen Jahren für de $r = 1{,}05$ ein Kapital sich verdoppele, verdreifac für den ersten Fall $\mu = 2$, und

$$x = \frac{\text{Log.}\,2}{\text{L.}\,1{,}05} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = \frac{3010300}{211893} = 1$$

$2\frac{2}{5}$ Monat; im andern aber für $\mu = 3$, ist

$$x = \frac{\text{Log.}\,3}{\text{L.}\,1{,}05} = \frac{0{,}4771213}{0{,}0211893} = \frac{4771213}{211893} = 2$$

$6\frac{1}{5}$ Monat.

§. 100. Beispiel.

A hat Gelegenheit sein Kapital $C = 5470$ Thlr. terzubringen, daß ihm alle halbe Jahre von 100 Thlr. 2 Zins gegeben werden, und der Zins jedesmal sogleich zum Kapital geschlagen wird. Diesen Vortheil gen $7\frac{1}{2}$ Jahre. Wie hoch wird sein Kapital angewachsen se

Auflösung.

Dieser Fall ist im Allgemeinen im Zusatz §. 95 auf woselbst $C^{(mn)} = C\varrho^{mn}$ gefunden wurde. In dem wärtigen Beispiele ist nun $C = 5470$, $\varrho = 1 + \frac{2\frac{1}{2}}{100}$

1,025, $n = 2$, $m = \frac{15}{2}$, $mn = 15$, und daher $C^{(15)} = 5470 . \{1,025\}^{15}$.

Da nun

$$\begin{aligned} \text{Log. } 5470 &= 3,7379873 \\ 15 \text{ Log. } 1,025 &= 0,1608585 \\ \hline \text{so ist} \quad \text{Log. } C^{(15)} &= 3,8988458 \\ \text{folglich} \quad C^{(15)} &= 7922,2 \text{ Thlr.} \end{aligned}$$

Bei jährlichen Zinsen hätte sich eben dieselbe Summe 5470 in derselben Zeit von $7\frac{1}{2}$ Jahren, bei dem Zinsfuß $r = 1,05$ verwandelt in: $C^{(7\frac{1}{2})} = 5470 . \{1,05\}^{7\frac{1}{2}} = 7886,9$ Thlr.

§. 101.

Bemerkungen über den Zinsfuß bei jährlichen, halbjährlichen, vierteljährigen, und überhaupt $\frac{1}{n}$ jährlichen Zinsen.

Wenn, wie bisher immer angenommen wurde, der jährliche Zinsfuß r ist; so wächset ein Kapital C am Ende eines Jahrs auf Cr an. Wenn ferner in einem Jahre n Termine zu Bezahlung des Zinses statt finden, und der $\frac{1}{n}$ jährliche Zinsfuß, nemlich das Kapital 1 vermehrt um seinen Zins in diesem $\frac{1}{n}$ Theile des Jahrs, ϱ heißt, so wächset eben diß Kapital, vorausgesetzt, daß die Zinse am Ende eines jeden Termins ohne den geringsten Zeitverlust wieder zum Kapital geschlagen werden können, am Ende dieser n Termine, das ist, am Ende des Jahrs auf $C\varrho^n$ an. Soll nun nach der Natur der Sache C gleich hoch genüzt werden, ob diß Kapital auf jährliche, oder $\frac{1}{n}$ jährliche Zinse gelegt wird, so muß $Cr = C\varrho^n$, und also $\varrho = \sqrt[n]{r}$ seyn.

Diß ist demnach, unter der eben bemerkten Voraussetzung, der Werth des $\frac{1}{n}$ jährlichen Zinsfußes, durch den jährlichen

$$x = \frac{\cdots}{\text{Log.}\,r}$$

Fragt man z. B. nach wie vielen Jahren für den Zi
$r = 1{,}05$ ein Kapital sich verdoppele, verdreifache,
für den ersten Fall $\mu = 2$, und

$$x = \frac{\text{Log.}\,2}{\text{L.}\,1{,}05} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = \frac{3010300}{211893} = 14\ \text{J}$$

$2\frac{2}{5}$ Monat; im andern aber für $\mu = 3$, ist

$$x = \frac{\text{Log.}\,3}{\text{L.}\,1{,}05} = \frac{0{,}4771213}{0{,}0211893} = \frac{4771213}{211893} = 22\ \text{J}$$

$6\frac{1}{5}$ Monat.

§. 100. Beispiel.

A hat Gelegenheit sein Kapital $C = 5470$ Thlr. s
terzubringen, daß ihm alle halbe Jahre von 100 Thlr. $2\frac{1}{2}$
Zins gegeben werden, und der Zins jedesmal sogleich n
zum Kapital geschlagen wird. Diesen Vortheil genieß
$7\frac{1}{2}$ Jahre. Wie hoch wird sein Kapital angewachsen seyn

Auflösung.

Dieser Fall ist im Allgemeinen im Zusatz §. 95 aufg
woselbst $C^{(mn)} = C\varrho^{mn}$ gefunden wurde. In dem g
wärtigen Beispiele ist nun $C = 5470$, $\varrho = 1 + \frac{2\frac{1}{2}}{100}$

ſo iſt $\quad Log.\ C^{(15)} = 3{,}8988458$

folglich $\quad C^{(15)} = 7922{,}2$ Thlr.

Bei jährlichen Zinſen hätte ſich eben dieſelbe Summe 54
derſelben Zeit von $7\frac{1}{2}$ Jahren, bei dem Zinsfuß r =
verwandelt in: $C^{(7\frac{1}{2})} = 5470 . \{1{,}05\}^{7\frac{1}{2}} = 7886{,}9$

§. 101.

Bemerkungen über den Zinsfuß bei jährlichen, ha
lichen, vierteljährigen, und überhaupt $\frac{1}{n}$ jährlichen Zin

Wenn, wie bisher immer angenommen wurde, de
liche Zinsfuß r iſt; ſo wächſet ein Kapital C am Ende
Jahrs auf Cr an. Wenn ferner in einem Jahre n Term
Bezahlung des Zinſes ſtatt finden, und der $\frac{1}{n}$ jährliche
fuß, nemlich das Kapital 1 vermehrt um ſeinen Zins in
$\frac{1}{n}$ Theile des Jahrs, ϱ heißt, ſo wächſet eben diß Ka
vorausgeſetzt, daß die Zinſe am Ende eines jeden Te
ohne den geringſten Zeitverluſt wieder zum Kapital geſch
werden können, am Ende dieſer n Termine, das iſt, am
des Jahrs auf $C\varrho^n$ an. Soll nun nach der Natur der
C gleich hoch genüzt werden, ob diß Kapital auf jäh
oder $\frac{1}{n}$ jährliche Zinſe gelegt wird, ſo muß $Cr = C\varrho^n$,
alſo $\varrho = \sqrt[n]{r}$ ſeyn.

Diß iſt demnach, unter der eben bemerkten Vorausſe
der Werth des $\frac{1}{n}$ jährlichen Zinsfußes, durch den jähr

n	$\sqrt[n]{r}$	$\{\sqrt[n]{r}\}-1$
2	1,02469	0,02469
4	1,01227	0,01227
12	1,00426	0,00426

Es ist diesemnach für ein Kapital von 100000
das zu jährlichen 5 pCt. genützt wird, der halbjährig
2469, mithin die beiden halbjährigen Zinse = 4938,
Summe um 31 Thaler geringer ist, als der jährige Zins
zu 5 pCt. angelegter 100000 Thaler. Und so muß
seyn. Denn wenn, wie wir voraussetzen, der hal
Zins im Augenblick, da er verfallen, gleich wieder eben
das Kapital, benützt werden kann, so wächst bei dem
1,02469 die Summe von 100000 Thalern in zwei
Jahren, das ist am Ende eines Jahrs auf 10
$\{1{,}024695\}^2$ an, welcher Werth = 100000. 1,05 is

Uebrigens ist doch auch zu bemerken, daß für
100000 und r = 1,05 der Unterschied nur 31 Thaler
und bei noch kleineren Summen ganz gering sey.

§. 102.

Wenn wir den Fall setzen, daß $\frac{1}{n}$ der jährlichen Z
den nten Theil eines Jahrs eingenommen, und ebenfall
wieder eben so untergebracht werden können, so ist d

Kapital, 1 um seinen $\frac{1}{n}$ jährlichen Zins vermehrt, = 1+

Mithin wäre der Werth von C am Ende eines solchen Termins, deren n auf ein Jahr gehen, $= \left\{1 + \frac{\{r-1\}}{n}\right\} C$, und eben dieses C am Ende aller n Termine, das ist des ganzen Jahrs, würde auf $\left\{1 + \frac{r-1}{n}\right\}^n C$, also nach m Jahren auf $\left\{1 + \frac{r-1}{n}\right\}^{mn} C$ anwachsen, von welchem Ausdruck leicht erwiesen werden kann, daß er für solche n, die > 1 sind, nothwendig grösser als Cr^{mn} ist.

Ohne eine besondere ausdrücklich gemachte Bedingung kann also, wenn man Zinse von Zinsen rechnet, bei $\frac{1}{n}$ jährlichen Zinsen der Zinsfuß nicht $1 + \frac{r-1}{n}$ seyn, sondern derselbe muß, wie bereits gezeigt worden $= \sqrt[n]{r}$ gesetzt werden.

§. 103. Aufgabe.

A hat Gelegenheit eine Summe von 60000 Thalern entweder in halbjährlichen Terminen 11 Jahre lang zu $2\frac{1}{2}$ pCt. auf den Termin, oder eben diese Zeit über in $\frac{1}{4}$ jährlichen Terminen zu $1\frac{1}{4}$ pCent, dem Termin nach unterzubringen. Welches ist vortheilhafter?

Auflösung.

Für den ersten Fall ist das ausbedungene $\varrho = 1{,}025$, $C = 60000$, $n = 2$, und $m = 11$. Daher ist $C^{(22)} = C.\varrho^{22} = 60000.\ 1{,}025^{22}$.

Also $C^{(44)} = 103294, 4$

Für den zweiten Fall haben wir C = 60000; m = 11, und das ausbedungene $\varrho = 1{,}0125$; d

$$C^{(44)} = 60000 . 1{,}0125^{44}.$$

Da nun	Log. 1,0125	=	0,0053950
und	44 Log. 1,0125	=	0,2373800
auch	Log. 60000	=	4,7781513
so ist	Log. $C^{(44)}$	=	5,0155313
mithin	$C^{(44)}$	=	103640,0

Es ist demnach die letztere Gelegenheit um 345,5 vortheilhafter als die erste.

§. 104. Aufgabe.

Ein Kapital C ist so angelegt, daß jährlich Zi Zinseszinse hinzukommen. Ueberdiß wird am End jeden Jahrs die Summe $C' \begin{Bmatrix}\text{hinzugethan}\\\text{hinweggenommen}\end{Bmatrix}$, mit deren und Zinseszinsen es gleiche Bewandtniß hat. Wie hoch für den jährlichen Zinsfuß r, das Ganze nach Verfl m Jahren angewachsen seyn?

Auflösung.

Das Kapital C im Anfange des ersten Jahrs an wächset am Ende des mten Jahrs auf Cr^m an. am Ende des ersten Jahrs $\begin{Bmatrix}\text{nachgeschossene}\\\text{abgezogene}\end{Bmatrix}$ Kapital C' b

sich am Ende des mten Jahrs, mit seinen Zinsen und Zinseszinsen, auf $\pm C' r^{m-1}$. Eben so ist das am Ende des zweiten Jahrs $\left\{\begin{matrix}\text{hinzugefügte}\\ \text{hinweggenommene}\end{matrix}\right\}$ Kapital C' am Ende des mten Jahrs angewachsen auf $C' r^{m-2}$, und so geht diß fort, bis zu dem C' zu Ende des mten Jahres hinzugethan, oder hinweggenommen wird. Mithin beträgt die verlangte Summe S $Cr^m \pm C'r^{m-1} \pm C'r^{m-2} \pm C'r^{m-3} \ldots \pm C'$, oder $Cr^m \pm \{1 + r + r^2 \ldots + r^{m-2} + r^{m-1}\} C'$.

Nun ist aber $1 + r + r^2 \ldots + r^{m-1} = \frac{r^m - 1}{r - 1}$, folglich ist $S = Cr^m \pm C' \left\{\frac{r^m - 1}{r - 1}\right\}$, wo das obere Zeichen + für den Fall gilt, wenn C' mit seinen Zinsen am Ende eines jeden Jahrs zu C, und seinen Zinsen hinzukommt, und das untere für den, wenn diese Grössen von Cr^m abgezogen werden.

Anders kann man die Aufgabe auch also auflösen:

Im Anfang des ersten Jahrs ist das Kapital = C, und am Ende desselben verwandelt es sich in Cr. Nun $\left\{\begin{matrix}\text{kommt}\\ \text{geht}\end{matrix}\right\}$ aber noch die Summe $C' \left\{\begin{matrix}\text{hinzu}\\ \text{ab}\end{matrix}\right\}$; mithin haben wir für den Anfang des zweiten Jahrs die $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ $Cr \pm C'$.

Diese verwandelt sich am Ende des zweiten Jahrs in $Cr^2 \pm C'r$; nemlich das Glied Cr wird nach 1 Jahr Cr^2 und das andere $\pm C'$ aus eben dem Grunde $\pm C'r$. $\left\{\begin{matrix}\text{Addirt}\\ \text{Subtrahirt}\end{matrix}\right\}$ man dann abermal C', so ergiebt sich für das Ende des zweiten, oder den Anfang des dritten Jahrs $Cr^2 \pm C'r \pm C'$.

Am Ende des dritten Jahrs verwandelt sich Cr^2 in Cr^3; $\pm C'r$ in $\pm C'r^2$; $\pm C'$ in $\pm Cr$, mithin haben wir am Ende dieses dritten Jahrs die $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ $Cr^3 \pm C'r^2 \pm C'r \pm C'$.

oder

$$= Cr^m \pm C' \{r^{m-1} + r^{m-2} \ldots + r + 1\}$$

$$\left\{= Cr^m \pm C' \frac{r^m - 1}{r - 1}\right\}$$

§. 105. Zusatz.

Die so eben gefundene Formel enthält auch die
wortung der Frage: Unter welchen Umständen, bei H
nehmung der jährlichen Summe C', von der anfän
Summe C gar nichts mehr übrig bleibt, oder S =
Diß geschiehet nemlich, wenn

$$Cr^m = C' \left\{\frac{r^m - 1}{r - 1}\right\} \text{ oder } \frac{C}{C'} = \frac{r^m - 1}{r^m \{r - 1\}} \text{ i}$$

§. 106.

1. Beispiel.

Es legt jemand ein Kapital von 8900 Thlr. de
an, daß er die jährlichen Zinse, à $5\frac{1}{2}$ Procent, zum
schlägt. Dagegen nimmt er am Ende eines jeden
250 Thlr. von der Masse zu seinem Gebrauche hinweg.
hoch wird sich, nach 13 Jahren, sein Vermögen belau

Da hier C = 8900, C' = 250, r = 1,055 und m
so ist

$$S = 8900 \cdot 1{,}055^{13} - 250 \left\{\frac{1{,}055^{13} - 1}{0{,}055}\right\}.$$

Wir haben also:

$$S = 8900 . 2{,}005776 - \frac{250 . 1{,}005776}{0{,}055000}$$

$$= 8900 . 2{,}005776 - \frac{250 . 1{,}005776}{55000}$$

Nun ist

Log. 8900 = 3,9493900

und Log. 2,005776 = Log. $1{,}055^{13}$ = 0,3022825

folglich Log. 8900. 2,005776 = 4,2516725

und 8900. 2,005776 = 17852,41

Sodann ist im Subtrahendus:

Log. 250 = 2,3979400
Log. 1005776 = 6,0025013

8,4004413
Log. 55000 = 4,7402637

3,6600786

Also Subtrahendus = 4571,708

Folglich ist S = 17852,41 — 4571,708 = 13280

2. Beispiel.

Ein Verschwender besitzt zwar ein Vermögen von 37 Thlrn., das ihm Zinse und Zinseszinse briugt, und

$$\frac{379479}{24572} = \frac{1,05^m - 1}{1,05^m \cdot 0,05};$$

hieraus ergiebt sich:

$$1,05^m = \frac{24572}{5598,05}$$

daher m Log. $1,05 =$ Log. $24572 -$ Log. $5598,05$

$$\text{und } m = \frac{\text{Log. } 24572 - \text{Log. } 5598,05}{\text{Log. } 1,05}$$

Nun ist aber:

$$\begin{array}{lrl} & \text{Log. } 24572 & = 4,3904405 \\ \text{und} & \text{Log. } 5598,05 & = \underline{3,7480368} \\ & & \ 0,6424037 \end{array}$$

$$\text{folglich } m = \frac{0,6424037}{0,0211893} = \frac{6424037}{211893}$$

$$= 30 \text{ Jahr } 3 \text{ Monat.}$$

§. 107. Aufgabe.

Eine Rente a ist m Jahre nach einander, jedesma
Ende des Jahrs verfallen? Was ist ihr baarer Werth,
der Werth dieser Rente am Anfange des ersten dieser m J
für den Zinsfuß r?

Auflösung.

Die erste Rente ist verfallen am Ende des ersten Jahrs. Ihr Werth um 1 Jahr zurück diskontirt, ist also am Anfange des ersten Jahrs $= \frac{a}{r}$ (s. §. 96.).

Die zweite Rente a, am Ende des zweiten Jahrs verfallen, und um 2 Jahre zurück diskontirt, giebt den baaren Werth $\frac{a}{r^2}$.

Auf gleiche Art ist der baare Werth der am Ende des dritten Jahrs verfallenen Rente a, wenn sie auf 3 Jahre zurück diskontirt wird, $\frac{a}{r^3}$, u. s. w. Es ist also die Summe des baaren Werths aller einzelner, auf den Anfang des ersten Jahrs diskontirter Renten, oder

$$S = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} \cdots + \frac{a}{r^m}.$$

$$= a \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \cdots + \frac{1}{r^m} \right\}$$

aber

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \cdots + \frac{1}{r^m} = \frac{\frac{1}{r^{m+1}} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r} - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{r^m}\right\}}{1 - \frac{1}{r}};$$

daher ist

$$S = \frac{a}{r-1}\left\{1 - \frac{1}{r^m}\right\};$$

ein Ausdruck, der durch Logarithmen leicht berechnet werden kann.

Jahre zurük diskontirte Grundkapital vorstellt. Da
det sich der gesuchte baare Werth S, wenn man das
kapital auf m Jahre zurück diskontirt, diese Summe
vom Grundkapital abziehet, und den Ueberrest mit a
pliciret.

§. 109. Zusatz.

Ist der baare Werth S bekannt, oder gegeben,
sich die Rente a durch den Ausdruck

$$a = \frac{S\{r - 1\}}{1 - \frac{1}{r^m}},$$

oder auch

$$a = \frac{S}{p - \frac{p}{r^m}}$$

§. 110.

1. Beispiel.

A genießt eine jährliche Rente von 375 Thlrn.,
zum erstenmal nach Verfluß eines Jahrs, und so 1
nach einander zahlbar ist. Nun möchte er sie jetzo g
gen baares Geld verhandeln. Was ist ihr baarer
wenn der Zinsfuß 5 Procent angenommen wird? Fü

besondern Fall haben wir demnach

$$a = 375,\ m = 18,\ r = 1,05,$$

und mithin verwandelt sich der allgemeine Werth

$$S = \frac{a}{r-1} \left\{1 - \frac{1}{r^m}\right\}$$

in den besondern:

$$S = \frac{375}{0,05} \left\{1 - \frac{1}{1,05^{18}}\right\} = 7500 \left\{1 - \frac{1}{1,05^{18}}\right\}$$

den wir durch Hülfe der Logarithmen also berechnen:

Es ist:

$$\text{Log. } 1,05 = 0,0211893;$$

also 18 L. 1,05, oder L. $1,05^{18} = 0,3814074$

also $1,05^{18} = 2,40662;$

wir haben demnach

$$S = \frac{7500 \cdot 1,40662}{2,40662}$$

Nun ist ferner:

	Log. 7500	= 3,8750613
und	Log. 1,40662	= 0,1481768
		4,0232381
	Log. 2,40662	= 0,3814074
	Log. S	= 3,6418307
folglich	S	= 4383,6 Thaler.

2. Beispiel.

A hat eine baare Summe von 9580 Thalern, und möchte sich gerne damit eine jährliche, nach Verfluß eines Jahrs

$$1 - \frac{1}{r^m},$$

welcher sich wegen $S = 9580$, $r = 1{,}04$, und m
in diesen besondern verwandelt:

$$a = \frac{9580 \cdot 0{,}04}{1 - \frac{1}{1{,}04^{25}}}$$

aber

$$\text{Log. } 1{,}04 = 0{,}01$$

und

$$25 \text{ Log. } 1{,}04 \text{ oder Log. } 1{,}04^{25} = 0{,}42$$

also

$$1{,}04^{25} = 2{,}66$$

daher ist

$$a = \frac{9580 \cdot 0{,}04 \cdot 2{,}66583}{1{,}66583}$$

$$= \frac{3832 \cdot 266583}{1665830}$$

Nun ist aber Log. $3832 = 3{,}5834255$
Log. $266583 = 5{,}4258325$

$9{,}0092580$

ferner: Log. $1665830 = 6{,}2216307$

Log. $a = 2{,}7876273$

mithin $a = 613{,}2354$

Es wird also A für seine hingegebene 9580 Thaler eine 25 Jahre lang dauernde, nach Verfluß 1 Jahrs von jetzt an erstmals anfangende Jahrrente von 613,2 Thalern erkaufen können, wenn der Zinsfuß 4 Procent anbedungen wird.

§. 111. Aufgabe.

A bezieht von jetzt über 1 Jahr erstmals eine m Jahre fortdauernde Jahrrente a, welche für den Zinsfuß r berechnet ist, und möchte sie gerne in eine andere, in eben denselben Terminen zahlbare, aber μ Jahre fortwährende für den Zinsfuß ϱ verwandeln. Wie groß wird diese letztere x seyn?

Auflösung.

Der baare Werth der ersten ist, nach der vorhergehenden Auflösung

$$= \frac{a}{r-1}\left\{1 - \frac{1}{r^m}\right\},$$

und der der letzteren ist

$$= \frac{x}{\varrho-1}\left\{1 - \frac{1}{\varrho^m}\right\}.$$

Da nun in der Natur der Sache liegt, daß diese beiden Werthe gleich sind, hat man

$$\frac{a}{r-1}\left\{1 - \frac{1}{r^m}\right\} = \frac{x}{\varrho-1}\left\{1 - \frac{1}{\varrho^m}\right\},$$

woraus

$$x = a \cdot \left\{\frac{\varrho-1}{r-1}\right\} \cdot \left\{\frac{1 - \frac{1}{r^m}}{1 - \frac{1}{\varrho^m}}\right\}$$ folgt.

§. 112. Beispiel.

A bezieht von jetzt über 1 Jahr erstmals und so 20 Jahre nach einander eine Jahrrente von 100 Thlrn., die ihn für den Zinsfuß r == 1,05 gegeben wurde. Nun möchte er dieselbe in eine andere, zu eben der Zeit zahlbare, aber nur 12 Jahre dauern, für den Zinsfuß ϱ == 1,055 berechnete, umsetzen, Wie groß wird sie seyn?

Die Bedeutung der Zeichen der vorhergehenden allgemeinen Auflösung ist für diesen besondern Fall folgende:

$$a = 100; \quad r = 1{,}050, \; m = 20.$$
$$\varrho = 1{,}055, \; \mu = 12.$$

daher ist

$$x == 100 . \frac{0{,}055}{0{,}050} . \left\{ \frac{1 - \frac{1}{1{,}050^{20}}}{1 - \frac{1}{1{,}055^{12}}} \right\}$$

Nun ist Log. 1,050 == 0,0211893

und 20 Log. 1,050, oder Log. $1{,}050^{20}$ == 0,4237860

folglich $1{,}050^{20}$ == 2,653298

Ferner ist Log. 1,055 == 0,0232525

und 12 Log. 1,055 oder Log. $1{,}055^{12}$ == 0,2790300

folglich 1055^{12} == 1,90121

Es ist also $x == 100 . \frac{55}{50} . \frac{1{,}653298}{2{,}653298} . \frac{1{,}90121}{0{,}90121}$

oder

$$== \frac{110 . 1653298 . 190121}{2653298 . 90121}$$

welcher Ausdruck abermal durch Logarithmen am leichtesten also berechnet wird:

	Log.	110	=	2,0413927
	Log.	1653298	=	6,2183511
	Log.	190121	=	5,2790301
Dec. Erg.	Log.	2653298	=	3,5762140
Dec. Erg.	Log.	90121	=	5,0451740
	Log.	x	=	2,1601619 (s. §. 49.)
mithin		x	=	144,59 Thlr.

Es wird also A für seine 100 Thaler, unter den angenommenen Bedingungen, 144,59 Thlr. als jährlichen Rente erhalten.

§. 113. Aufgabe.

Man kauft eine Jahrrente a unter folgenden Bedingungen: daß dieselbe nach Verfluß von m Jahren von jetzt an erst anfangen, am Ende eines jeden Jahrs zahlbar seyn, und sodann n Jahre fortdauern soll. Was ist für den Zinsfuß r ihr baarer Werth?

Auflösung.

Die Rente a wird zum erstenmal fällig am Ende des mten Jahrs. Ihr Werth auf den Zeitpunkt, da unterhandelt wird, also auf den Anfang des ersten Jahrs diskontirt, ist $\frac{a}{r^m}$ (s. 96). Der baare Werth der zweiten am Ende des $m+1$ Jahrs fälligen Rente a ist, aus ähnlichem Grunde, $\frac{a}{r^{m+1}}$, und der der dritten am Ende des $m + 2$ Jahrs fälligen Rente $a = \frac{a}{r^{m+2}}$. Setzt man diese Art zu schließen fort, so findet sich, daß der baare Werth der nten, am Ende des $m + n - 1$ Jahrs fälligen Rente a seyn wird $= \frac{a}{r^{m+n-1}}$.

$$= \frac{a}{r^m} \left\{ 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \ldots + \frac{1}{r^{n-1}} \right\}$$

Aber $1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \ldots + \frac{1}{r^{n-1}} = \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r} - 1}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}};$$

folglich haben wir

$$S = \frac{a}{r^m} \left\{ \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}} \right\}$$

§. 114. Zusatz.

Aus der so eben gefundenen Gleichung folgt auch,

$$a = S\, r^m \left\{ \frac{1 - \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r^n}} \right\}$$

sey, welcher Werth für a folgende Aufgabe auflöset: gegebene baare Summe S eine Jahrrente a von solch schaffenheit zu erkaufen, die am Ende des mten Jahrs jetzt an zu rechnen, zum erstenmal verfallen ist, und n fortdauert, der Zinsfuß aber gleich r angenommen wir

§. 115.

1. Beispiel.

Man möchte eine Jahrrente von folgender Beschaffenheit kaufen. Dieselbe soll 450 Thlr. betragen, aber von jetzt an gerechnet erst nach Verfluß von 15 Jahren anfangen, 20 Jahre fortdauern, und am Ende eines jeden Jahrs zahlbar seyn. Der angenommene Zinsfuß ist 6 Procent. Was für eine Summe muß zu Erkaufung dieser Rente baar erlegt werden? Da hier $a = 450$, $m = 15$, $n = 20$, und $r = 1{,}06$ ist, so verwandelt sich der allgemeine Werth

$$S = \frac{a}{r^m}\left\{\frac{1 - \frac{r}{r^m}}{1 - \frac{1}{r}}\right\}$$

in folgenden besondern:

$$S = \frac{450}{1{,}06^{15}}\left\{\frac{1 - \frac{1}{1{,}06^{20}}}{1 - \frac{1}{1{,}06}}\right\}$$

zu dessen Berechnung wir die Logarithmen abermal sehr bequem anwenden können.

Es ist nemlich $\qquad \text{Log. } 1{,}06 = 0{,}0253059$

und 15 Log. 1,06, oder $\text{Log. } 1{,}06^{15} = 0{,}3795885$

also $\qquad 1{,}06^{15} = 2{,}396561$

Eben so ist $\qquad 20 \text{ Log. } 1{,}06 = 0{,}5061180$

mithin $\qquad 1{,}06^{20} = 3{,}207140$

Folglich ist $S = \frac{450}{2{,}396561} \cdot \frac{2{,}207140}{3{,}207140} \cdot \frac{1{,}06}{0{,}06}$

	Log.	53	=	1,724275
Dec. Ergänz.	Log.	2396561	=	3,62041
Dec. Ergänz.	Log.	320714	=	4,49388
also	Log.	S	=	3,35849
und		S	=	2282,92

Wenn man also baare 2283 Thlr. erlegt, so kann ma die obige Rente unter ermeldten Bedingungen erkaufe

2. Beispiel.

Ein reicher Anverwandter schenkt seinem Pathen Taufe zum Angebinde die Summe von 3000 Thale folgenden Bedingungen: Es soll für diese Summe e liche Zeitrente für das Kind erkauft werden, welche a wenn dasselbe das 20 Jahr zurück gelegt hat, anfang so viele Jahre für das Kind, oder die Seinigen f soll, als nach Süßmilchs Mortalitätstabellen die Lebensdauer einer 20jährigen Person beträgt. Der, sich anbietet diese Rente zu geben, (der Entrepr versteht sich aber zu nicht weiter, als zu 4 Procent groß wird nun die Rente a werden? Die Auflösun Falls ist in der §. 114 gegebenen allgemeinen Form

$$a = S\, r^m \left\{ \frac{1 - \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r^m}} \right\} \text{ enthalten,}$$

$$\left(1 - \frac{1}{1{,}04^{35{,}03}}\right)$$

Nun ist aber $\quad \text{Log. } 1{,}04 = 0{,}0170$

also 35,03 Log. 1,04 oder $\text{Log. } 1{,}04^{35{,}03} = 0{,}5966$

und $\quad 1{,}04^{35{,}03} = 3{,}9507$

Daher ist

$$a = \frac{120 \cdot 3950721 \cdot 1{,}04^{19}}{2950721}$$

Aber $\text{Log. } 1{,}04^{19} = 19 \text{ Log. } 1{,}04 = 0{,}3236327$

$$\text{Log. } 3950721 = 6{,}5966765$$

$$\text{Log. } 120 = 2{,}0791812$$

$$8{,}9994904$$

$$\text{Log. } 2950721 = 6{,}4699282$$

$$\text{Log. } a = 2{,}5295622$$

$$a = 338{,}502$$

Es wird also, unter den obigen Bedingungen, der ju… Mensch von seinem zurückgelegten 20sten Jahre an 3… Jahre lang eine jährliche Rente von $338\frac{1}{2}$ Thaler für die… seiner Geburt erhaltene und sogleich verhandelte Summe … 3000 Thlrn. genießen.

§. 116. Aufgabe.

A erhält eine Jahrrente a, welche er am Ende ei… Jahrs von jetzt an erstmals, und sofort m Jahre lang… ziehen kann. Der Zinsfuß ist r. Für diese Rente möch… eine andere x eintauschen, die, von jetzt an gerechnet, …

H

Nach der Aufgabe §. 107 ist der baare Werth eine[r]
rente a, die nach Verfluß von einem Jahr von jetzt an
soll, und m Jahre, bei dem Zinsfuß r, zu beziehen ist

$$= \frac{a}{r-1}\left\{1-\frac{1}{r^m}\right\},$$

und nach der vorhergehenden Aufgabe ist der baare
einer Jahrrente x, die nach Verfluß von μ Jahren e[n-]
fångt, am Ende eines jeden Jahrs zahlbar ist, und n
fortwåhret, fůr den Zinsfuß ϱ,

$$= \frac{x}{\varrho^{\mu}}\left\{\frac{1-\frac{1}{\varrho^n}}{1-\frac{1}{\varrho}}\right\}.$$

Da nun diese baaren Werthe gleich seyn můssen, so hat

$$\frac{x}{\varrho^{\mu}}\left\{\frac{1-\frac{1}{\varrho^n}}{1-\frac{1}{\varrho}}\right\} = \frac{a}{r-1}\left\{1-\frac{1}{r^m}\right\}$$

und mithin

$$x = a \cdot \varrho^{\mu} \cdot \frac{1-\frac{1}{\varrho}}{r-1} \cdot \frac{1-\frac{1}{r^m}}{1-\frac{1}{\varrho^n}}$$

welcher Ausdruck, wie alle bisherigen, sehr bequem
Logarithmen berechnet werden kann.

$$1 - \frac{1}{r^n}$$

§. 118. Zusatz.

Aus dem bekannt angenommenen x, und den übr gegebenen Größen kann auch a gefunden werden.

§. 119. Aufgabe.

Man empfängt m Jahre nach einander, am Ende e jeden Jahrs, die Summe a, legt aber diese sogleich auf und Zinseszinse. Der Zinsfuß ist r. Auf welche Summ wird das Ganze am Ende des mten Jahrs angewachsen se

Auflösung.

Das am Ende des ersten Jahrs verfallene a ist am des zweiten ar, des dritten ar^2, des mten ar^{m-1}. am Ende des zweiten Jahrs verfallene a ist am Ende des ten ar, des vierten ar^2, des mten ar^{m-2}. Eben so ist am Ende des dritten Jahrs verfallene a am Ende des Jahrs angewachsen auf ar^{m-3}; und so geht diß fort bi dem a, das am Ende des mten Jahrs verfallen ist, und selbst gleich bleibt.

Folglich wachsen alle am Ende des ersten, zweiten ten ꝛc. Jahrs verfallenen a mit ihren Zinsen und Zinsesz bis zu Ende des mten Jahrs auf die Summe

§. 120. Zusatz.

Man hätte bei dieser und der vorhergehenden Au anstatt die Verfallzeit am Ende des Jahrs zu setzen, auch im Anfange desselben annehmen können. Die sungen für diesen Fall, wie auch für halbjährliche, jährliche rc. Zinsen bleiben aber der eigenen Uebung des überlassen.

§. 121. Beispiele.

Jemand beziehet 15 Jahre lang, heute über 1 Jah mals, jährlich die Summe von 1000 Thalern, die e im Augenblick des Empfangs sogleich zu $5\frac{1}{4}$ Procen Zinseszinse anzulegen Gelegenheit findet. Wie hoch wi das Ganze am Ende des 15ten Jahrs belaufen?

Der allgemeine Werth $S = a \left\{\frac{r^m - 1}{r - 1}\right\}$

verwandelt sich in gegenwärtigem Fall wegen a = $r = 1{,}0525$, und $m = 15$ in:

$$S = 1000 \cdot \left\{\frac{1{,}0525^{15} - 1}{0{,}0525}\right\}$$

$$= \frac{10000000}{525} \left\{1{,}0525^{15} - 1\right\}$$

aber	Log. 10000000	=	7,0000000
	Log. 1,154426	=	0,0623662
Dec. Erg.	Log. 525	=	7,2798407
	Log. S	=	4,3422069
	S	=	21989,07 Th

§. 122. Aufgabe.

Man sucht den baaren Werth von folgender verän chen Zeitrente: Sie sey am Ende des ersten Jahrs a, zweiten 2a, des dritten 3a u. s. w., bis zum mten J da sie ma ist?

Auflösung.

Die am Ende des ersten Jahrs verfallene Rente a, au Anfang desselben zurückdiscontirt, giebt den baaren Wert und die am Ende des zweiten Jahrs verfallene Rente 2a eben diesen Zeitpunkt, d. i. auf 2 Jahre zurück diskon den baaren Werth $\frac{2a}{r^2}$, u. s. w. mit den übrigen, bis die Rente ma, deren baarer Werth $\frac{ma}{r^m}$ ist. Folglich i

$$= a \left\{\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} \ldots + \frac{m}{r^m}\right\}$$

Es kommt also darauf an, die Reihe $\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} \ldots$
zu summiren.

Zu dem Ende sey

$$s = \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} \ldots + \frac{m}{r^m};$$

so ist

$$r^m s = r^{m-1} + 2\, r^{m-2} + 3\, r^{m-3} \ldots + n$$

$$= r^{m-1} + r^{m-2} + r^{m-3} + r^{m-4} \ldots\ldots + r^{m-(m-1)} +$$

$$+ r^{m-2} + r^{m-3} + r^{m-4} \ldots \quad + r^{m-(m-1)} +$$

$$+ r^{m-3} + r^{m-4} \ldots \quad + r^{m-(m-1)} +$$

$$+ r^{m-4} \ldots \quad + r^{m-(m-1)} +$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$$+ r^{m-(m-1)} +$$

$$+$$

der dritten . . . . $= \frac{r^{m} -}{r -}$

der (m-1ten) . . . . $= \frac{r^{m-(m}}{r -}$

der mten . . . . $= \frac{r^{m-(m}}{r -}$

Es sind aber gerade m solche Horizontalreihen: de
sind ihrer so viel, als die Reihe r^{m} f Glieder hat, das
indem die Coefficienten eines jeden Glieds denselben z
auch zeigen, das wie vielte Glied jedes in der Reihe r^{m}

Folglich ist die Summe aller Horizontalreihen

$$= \frac{1}{r-1} \{r^{m}-1 + r^{m-1} - 1 + r^{m-2} - 1 \ldots + r$$

$$= \frac{1}{r-1} \{r^{m} + r^{m-1} \ldots + r - m\}$$

weil die Anzahl aller abzuziehenden Einheiten gleich der A
der eben erwähnten Horizontalreihen ist, da der Zähl
Summe eines jeden das Glied -1 einmal enthält. D
r^{m} f gleich eben dieser Summe aller Horizontalreihen i
haben wir:

$$r^{m} f = \frac{1}{r-1} \{r^{m} + r^{m-1} \ldots + r - m\}$$

oder

$$= \frac{r}{r-1} \{1 + r + r^{2} \ldots + r^{m-1}\} - \frac{}{r}$$

Es ist aber

$$1 + r + r^2 + \ldots\ldots + r^{m-1} = \frac{r^m - 1}{r - 1},$$

folglich ist

$$r^m f = \frac{r}{r-1} \left\{ \frac{r^m - 1}{r - 1} \right\} - \frac{m}{r-1},$$

und daher

$$f = \frac{r}{\{r-1\}^2} \left\{ 1 - \frac{1}{r^m} \right\} - \frac{m}{\{r-1\} r^m},$$

und endlich

$$S = a f = \frac{ar}{\{r-1\}^2} \left\{ 1 - \frac{1}{r^m} \right\} - \frac{am}{\{r-1\} r^m}.$$

Diese Auflösung scheint etwas einfacher, als diejenige, die Tetens in seinen Zusätzen zum 1. Kapitel seiner Einleitung zur Berechnung der Leibrenten §. 14. gegeben hat.

§. 123. Beispiel.

A hat nach Verfluß von 1, 2, 3 . . . 10 Jahren die Jahrsrenten 10, 20, 30... 100 zu beziehen, und möchte dieselben gegen baares Geld, das im Anfange des ersten Jahrs zu erlegen ist, verhandeln. Derjenige, der sie einhandeln will, bietet nur $3\frac{1}{2}$ Procent. Was ist der baare Werth jener Rente?

Dieser Fall, aus der so eben gefundenen allgemeinen Formel abgeleitet, giebt folgende Bestimmungen:

$$a = 10, \quad r = 1{,}035, \text{ und } m = 10;$$

folglich ist

$$S = \frac{10 \cdot 1{,}035}{0{,}035^2} \left\{ 1 - \frac{1}{1{,}035^{10}} \right\} - \frac{100}{0{,}035 \cdot 1{,}035^{10}}$$

oder

$$S = \frac{10350000}{1225}\left\{1 - \frac{1}{1{,}035^{10}}\right\} - \frac{100000}{35 \cdot 1{,}035^{10}}$$

Nun ist aber Log. 1,035 = 0,0149403

daher 10 Log. 1,035 = Log. $1{,}035^{10}$ = 0,1494030

und $1{,}035^{10}$ = 1,410597

folglich ist

$$S = \frac{10350000 \cdot 410597}{1225 \cdot 1410597} - \frac{100000}{35 \cdot 1{,}410597}$$

Hier müssen beide Glieder, wenn man sich der Logarithmen bedienen will, besonders berechnet werden.

Es ist nämlich	Log. 10350000	= 7,0149403
	Log. 410597	= 5,6134158
Dec. Ergänz.	Log. 1225	= 6,9118639
Dec. Ergänz.	Log. 1410597	= 3,8505970
		3,3908170
erstes Glied		= 2459,331

Sodann ist für das zweite Glied

	Log. 100000	= 5,0000000
Dec. Ergänz.	Log. 35	= 8,4559320
Dec. Ergänz.	Log. 1,410597	= 9,8505970
		3,3065290
	Zweites Glied	= 2025,484

folglich ist S = 2459,331 − 2025,484 = 433,847

Obige Renten können also, unter den angeführten Bedingun-

Frage auflösen: Aus einer gegebenen baaren Summe, bei einem bekannten Zinsfuß diejenige Rente zu berechnen eine gegebene Anzahl Jahre am Ende eines jeden Jahrs und dabei von solcher Beschaffenheit ist, daß sie am End ersten Jahrs einfach, des zweiten zweiffach, des d dreifach ꝛc. ist. Aus der obigen allgemeinen Formel e sich nämlich:

$$a = \frac{\{r-1\}^2\ r^m\ S}{r\ \{r^m-1\} - m\ \{r-1\}}$$

welcher Ausdruck, nach dem bisher gezeigten, leicht durc garithmen berechnet werden kann. Die Rente selbst 2a, 3a, 4a ꝛc.

§. 125. Zusatz.

Jahrrenten, die in jeder beliebigen arithmetischen gression fortschreiten, lassen sich sehr leicht auf das Vorh hende zurückführen. Eben so auch solche, die nach dem setz einer geometrischen Progression fortgehen, daher Uebung dem Leser überlassen bleibt.

K. Einige Bemerkungen über die Zunahme der Bevölkerung.

§. 126.

In jedem Staate finden sich in gewöhnlichen Zeiten, und wenn nicht Kriege und verheerende Kranheiten zuweilen eine Ausnahme machen, am Ende des Jahrs mehr Menschen, als im Anfange desselben: das ist, die Bevölkerung nimmt in der Regel zu. Es sey nun in irgend einem solchen Lande die Anzahl aller im Anfange des Jahrs vorhandenen Menschen M; M′ und M″ aber die Anzahl derselben im Anfange des zweiten und dritten Jahrs, so ist M′ — M, und M″ — M′ das Wachsthum der vorhandenen Menschenmasse im ersten und zweiten Jahr. Nun läßt sich aber immer M′ — M, das kleiner als M ist, als einen Theil von M ansehen, also daß man

$M' - M = \frac{M}{p}$ setzen kann. Eben so sey auch

$$M'' - M' = \frac{M'}{p'}; \text{ so ist } p = \frac{1}{\frac{M'}{M} - 1}, \text{ uud } p' = \frac{1}{\frac{M''}{M'} - 1}$$

Es berechtigt aber der ruhige Zustand, in dem wir die Bevölkerung, von keiner fremdartigen Ursache aufgehalten oder gestört, ihren Gang fortgehen lassen, zur Annahme des Satzes, daß so wie aus M Menschen in einem Jahre M′ entstanden sind, eben so auch in dem folgenden aus den nun vorhandenen M′ jetzt deren M″ entstehen werden, das ist: daß

$M : M' = M' : M''$, und mithin auch $\frac{M'}{M} = \frac{M''}{M'}$ sey.

Ist diß aber, so ist auch $p = p'$, das heißt: es ist die Zunahme der Bevölkerung in einem Jahre der eben so vielte Theil der im Anfange desselben vorhandenen Menschenmenge, als die Zunahme der Bevölkerung in dem darauf folgenden der

ist (s. §. 91.), so wächset dasselbe in den zwei ersten J
auf die Summe Cr und Cr^2 an, und die Wachsthün
denselben sind $Cr - C$, und $Cr^2 - Cr$, oder $C\{r$

und $Cr\{r-1\}$. Es ist aber $C\{r-1\} = \frac{C}{\frac{1}{r-1}}$

und $Cr\{r-1\} = \frac{Cr}{\frac{1}{r-1}}$, oder da (§. 93.) $\frac{1}{r-1}$

dem Grundkapital p ist, $C\{r-1\} = \frac{C}{p}$, und $Cr\{$

$= \frac{Cr}{p}$. Das heißt, das jährliche Wachsthum eines
pitals, das sich durch seine Zinse und Zinseszinse vergrö
ist gleich diesem Kapital, dividirt durch das Grundkapita

Unter obigen vorausgesetzten Umständen vermehrt sich
eine gewisse Volksmenge jährlich auf ähnliche Art, wie
Kapital, zu welchem alle Jahre die Zinse und Zinseszinse
geschlagen werden.

§. 127.

Wenn wir nun die obigen Bezeichnungen beibehalten,
ist $M' - M$, oder das jährliche Wachsthum der Mensch
zahl $M = \frac{M}{p}$; ferner $M'' - M'$, oder das jährliche Wac

fahrung, vermittelst des Werts p = $\frac{M}{M'-M}$ ...

Darf man p als bekannt voraussetzen, so folg...
$M' - M = \frac{M}{p}$, daß $M' = M \left\{\frac{p+1}{p}\right\}$ sey. Eben ...
wegen $M'' - M' = \frac{M'}{p}$; $M'' = M' \left\{\frac{p+1}{p}\right\} = M \left\{\frac{p...}{...}\right.$
ferner $M''' = M'' \left\{\frac{p+1}{p}\right\} = M \left\{\frac{p+1}{p}\right\}^3$, ꝛc.

Diese Schlüsse führen zu dem allgemeinen Resultat ...
die im Anfange des ersten Jahres vorhandene Men...
menge M am Ende des mten Jahrs auf $M^{(m)} = M \left\{\frac{p+...}{p}\right.$ ...
angewachsen sey.

§. 128.

In den Materialien zur Statistik der dänischen St...
Flensburg und Leipzig 1786. B. 2. Abhandlung V. ...
sich, daß die Volksmenge von Dännemark sich ungefä...
118 Jahren verdoppelt habe. Diese Erfahrung legen ...
bei Bestimmung von p zum Grund. Wenn nämlich im ...
fang jener 118 Jahre die Volksmenge dieses Landes M ...
so ist dieselbe nach 118 Jahren auf $M \left\{\frac{p+1}{p}\right\}^{118}$ angewa...
Da nun diese, der Erfahrung gemäs, doppelt so groß, ...
die anfängliche erfunden wurde, so ist

alſo

$$118 \text{ Log.} \left\{1 + \frac{1}{p}\right\} = \text{Log. } 2,$$

und mithin

$$\text{Log.} \left\{1 + \frac{1}{p}\right\} = \frac{\text{Log. } 2}{118}$$

Nun iſt

$$\text{Log. } 2 = 0{,}3010300,$$

und

$$\frac{\text{Log. } 2}{118} \; 0{,}0025511\,;$$

folglich iſt

$$\text{Log.} \left\{1 + \frac{1}{p}\right\} = 0{,}0025511,$$

daher

$$1 + \frac{1}{p} = 1{,}00589,$$

$$\frac{1}{p} = 0{,}00589,$$

und $p = 169{,}7$ oder beinahe 170.

Man kann alſo annehmen, daß ſich in Dännemar an den nördlichen Ländern eine gewiſſe Volksmenge jä um ihren $\frac{1}{170}$ Theil vermehre.

§. 129. Beiſpiel.

In einem Staat beträgt die Volksmenge 850000 ſchen. Wie hoch wird ſich dieſelbe nach 50 Jahren bela

0,0025472

Daher ist	50 Log. $\frac{171}{170}$	= 0,1273600
Ferner ist	Log. 850000	= 5,9294189
folglich	Log. $M^{(45)}$	= 6,0567789
und also	$M^{(45)}$	= 1139669

L. Von den natürlichen oder hyperbolische Logarithmen.

§. 130.

Wir haben oben §. 59 gezeigt, daß, wenn man de garithmen einer Zahl $1+x$ durch die Potenzen von x zudrücken sucht, man auf die Reihe

$$\text{Log.}\left\{1+x\right\} = A\left\{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \right.$$

kommt, welche die Grundlage zur Berechnung der Log men aller möglichen Zahlen ist (s. §. 63). In diesem druck von den Logarithmen von $1+x$ ist nun der Faktor A sofern man von keinem logarithmischen System insbeso spricht, eine völlig unbestimmte, der Willkühr überla Größe, wie es auch nach §. 4 seyn muß, da eine jede unzählig viele Logarithmen haben kann. Es bestimmt bei einerlei x, der Werth, den man dem Faktor A giebt,

man den Model des Systems nennt, das System, zu dem die durch jene Reihe berechneten Logarithmen gehören. So erhält man nach §. 61 für $A = 0,43429448$. Die gewöhnlichen Logarithmen der Tafeln, oder dasjenige System, wo $\text{Log. } 10 = 1$, $\text{Log. } 100 = 2$, u. s. w.

§. 131.

Unter allen Werthen, die man dem A geben kann, um diß oder jenes logarithmische System zu bilden, ist keiner einfacher, natürlicher, als der Werth $A = 1$. Durch diese Annahme ist man überhoben, in dem Ausdruck

$$\text{Log. } \{1+x\} = A \left\{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}\right\},$$

die Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.},$$

mit A zu multipliziren, und es stellt also dieselbe selbst den natürlichen Logarithmen von $1 + x$ vor. Ein gleiches gilt von der Reihe

$$\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\} = A \left\{2\,x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \text{etc.}\right\},$$ aus welcher

wir die Logarithmen aller Zahlen ableiten lehrten. Lassen wir nun dem A seine obige Bedeutung, nämlich setzen wir $A = 0,4342944819 \ldots$ so folgt, daß der Tafel- oder briggische Logarithme einer Zahl nichts andres sey, als das Produkt aus A in den natürlichen Logarithmen eben dieser Zahl, oder

$$\text{Log. Brig. } \{1+x\} = A \text{ Log. natural. } \{1+x\};$$

mithin ist auch

$$\text{Log. nat. } \{1+x\} = \tfrac{1}{A} \text{ Log. Brig. } \{1+x\},$$

§. 132.

Auf diese Art ist folgende kleine Tabelle der natür
Logarithmen der 10 ersten ganzen Zahlen entstanden:

Numer.	Log. natural.
1	0,0000000
2	0,6931472
3	1,0986123
4	1,3862944
5	1,6094380
6	1,7917550
7	1,9459101
8	2,0794415
9	2,1972246
10	2,3025851

§. 133.

Nunmehr ist es leicht, die Basis e des Systems d
türlichen Logarithmen, oder diejenige Zahl zu finden,
natürlicher Logarithme 1 ist. Denn man hat Brig. L
= A Log. nat. e; aber Log. nat. e = 1, also Brig. L
= A = 0,4342944819, mithin e = 2,718281 .
Diese Zahl ist zugleich auch der Nenner der mit 1 anfa
den geometrischen Progression, die bei dem ursprüng
System der natürlichen Logarithmen zum Grund liegt, w
also nach der Vorstellung §. 77. folgendes ist:

Quadratur der gleichseitigen Hyberbel auch Hyperbolisch[e]
nannt. In der Differential= und Integralrechnung si[nd]
von häufigem Gebrauche, daher man auch Tabellen
derselben hat.

M. Von den logarithmischen Differentialen [und] Integralen.

§. 135.

Um die vorhergehende Lehre mit ihrem so wichtigen [Ge]brauche in der Differential= und Integralrechnung zusa[mmen] zu passen, und den Leser bis dahin zu führen, wo sic[h ein] neues, unermeßliches Feld der Anwendung der Logarit[hmen] in der höhern Rechenkunst eröfnet, wird es nicht undie[nlich] seyn, folgenden Hauptsatz, als die Grundlage derselben, [vor]zutragen.

§. 136. Satz.

Das Differential des Logarithmen von $x = \frac{Adx}{x}$, wenn von keinem bestimmten logarithmischen System die [Rede] ist, A gleichfalls einen unbestimmten Werth hat, der abe[r in] jedem angenommenen eine beständige Größe ist.

Beweiß.

Es ist nach §. 59

aber $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{etc.} = \frac{1}{1+x}$

folglich $d\,\text{Log.}\,\{1+x\} = \frac{A\,dx}{1+x}$, und mithin auch

$$d\,\text{Log.}\,x = \frac{A\,dx}{x}.$$

Auf eine andere Art kann dieser Beweiß auch also geg
werden:

Da $\text{Log.}\,\{1+y\} = A\left\{y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \text{etc.}\right\}$

so wird auch, insofern y jeden Werth haben darf, wenn
$\frac{dx}{x}$ für y setzt,

$$\text{Log.}\left\{1 + \frac{dx}{x}\right\} = A\left\{\frac{dx}{x} - \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dx}{x}\right\}^2 + \tfrac{1}{3}\left\{\frac{dx}{x}\right\}^3 - \right.$$

seyn. Weil nun aber die höheren Potenzen von dx gege
verschwinden, so ist

$$\text{Log.}\left\{1 + \frac{dx}{x}\right\} = A\,\frac{dx}{x}.$$

Auf der andern Seite ist aber auch

$$\text{Log.}\,\{x+dx\} = \text{Log.}\left\{1 + \frac{dx}{x}\right\}x = \text{Log.}\,x + \text{Log.}\left\{1 + \right.$$

und also

$$\text{Log.}\left\{1 + \frac{dx}{x}\right\} = \text{Log.}\,\{x + dx\} - \text{Log.}\,x = d\,\text{Log}$$

Bei den natürlichen Logarithmen ist A = 1, da

$d\,Log.\,nat.\,x = \frac{dx}{x}$, und auch wieder $\int \frac{dx}{x} = Log.\,na$

§. 138. Zusatz.

Der so eben angeführte Satz kann auch noch auf ein dere Art erwiesen werden, welche von der für den Logari von $\{1 + x\}$ gefundenen Reihe unabhängig und unmi aus der Natur der Verbindung arithmetischer uud geo schen Progressionen zu einem logarithmischen System leitet ist.

Es sey nämlich in derjenigen abgeleiteten geomet Progression, von welcher (nach §. 15) alle Zahlen Glieder betrachtet werden können, u irgend eine Zah v ihr korrespondirender Logarithme. Je mehr Glieder zwischen je zwei der ursprünglichen geometrischen arithmetischen Progression eingeschaltet werden, da je mehr abgeleitete Progressionen gebildet werden, weniger sind in den letzten abgeleiteten Progressionen, den und v zugehören, zwei unmittelbar auf einander fol Glieder derselben von einander verschieden. Man wird der geometrischen, da ihr erstes Glied 1 ist, ihr zweites und also auch ihren Nenner 1 + k, und in der aritl schen das korrespondirende, das ist: die Differenz d

niß zu einander haben. Es sey demnach $\frac{d}{k}=M$, so kön

wir M als eine einem gewissen logarithmischen System zu hörige, und für dasselbe bestimmte, das ist: unveränder Zahl ansehen, so lange nur von diesem, und keinem and System die Rede ist. Ueberdiß seyen u und v in ihren P gressionen die nten Glieder von dem ersten an gerechnet. geht aber aus der Natur der Sache hervor, daß, so wi und k nur klein sind, n dagegen sehr groß seyn muß, da Anzahl der zwischen 1 und u eingeschalteten Glieder nothw dig sehr groß ist. Und wenn man (nach §. 15.) bedenkt, je mehr man solche abgeleitete Systeme bildet, desto näher Glieder der verschiedenen geometrischen Progressionen der u seyn werden, so wird man der Wahrheit immer näher k men, je kleiner man sich d und k, und je größer man n denkt. Daher nach mathematischem Sprachgebrauch d k unendlich klein, n aber unendlich groß angenommen wer Insoferne aber jedes Unendliche weder eines Wachsthums einer Abnahme fähig ist, müssen diese 3 Größen als un änderliche, oder beständige Größen angesehen werden. vorausgeschickt, so folgen aus der Natur geometrischer arithmetischer Progressionen die beiden Gleichungen

$$u = \{1+k\}^n, \text{ und } v = nd.$$

Aus der ersteren erhalten wir $k = u^{\frac{1}{n}} - 1$, und aus

andern, wegen $\frac{d}{k} = M$, ergiebt sich $k = \frac{v}{Mn} = u^{\frac{1}{n}}$ -

$$d\,\text{Log.}\{1+x\} = Mn\,\{\tfrac{1}{n}\{1+x\}^{\frac{1}{n}-1}\}\,dx$$

Da nun n unendlich groß ist, so ist $\frac{1}{n} = 0$, und

$$d\,\text{Log.}\{1+x\} = M\,\frac{dx}{1+x},$$ wo M, wie oben gesagt

den, eine jeglichem logarithmischen System eigen zug
ge, dasselbe vor andern auszeichnende Zahl vorstellt, die
den Model des Systems nennt. Ist M = 1, so sind
diesem Systeme gehörigen Logarithmen die natürlichen,
hyperbolischen.

§. 139.

Die beiden Werthe $u = \{1+k\}^n$, und $v =$ M
unter der im vorigen § angegebenen Bedeutung von M
und k, können noch auf andere Art genützt werden, um
tige Resultate daraus zu ziehen. Einmal ist, wenn m
eliminirt, wie eben gezeigt worden,

Log. $u = Mn\,\{u^{\frac{1}{n}} - 1\}$, oder, wenn $u = 1 +$
angenommen wird,

$$\text{Log.}\{1+x\} = Mn\,\{\{1+x\}^{\frac{1}{n}} - 1\}$$

Aber

$$\{1+x\}^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\,\frac{\left\{\frac{1}{n} - 1\right\}}{1.\ 2.}\,x^2$$

$$+ \quad n\left\{n \quad -1\right\} \left\{n \quad -2\right\} \left\{\quad n \quad -3\right\}x^3$$

1. 2. 3. 4.

Dieser Ausdruck, für n unendlich, verwandelt sich in

$$1 + \frac{1}{n}x - \frac{1}{n}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{n}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{n}\frac{x^4}{4} + \text{rc.}$$

Diß giebt

$$\text{Log.}\left\{1+x\right\} = M\left\{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{rc.}\right\}$$

welches eben die Reihe ist, die oben §. 59 gefunden wu

Sodann bietet der Ausdruck Log. u = Mn $\{u^n$ - oder Log. u = Mn $\{\sqrt[n]{u} - 1\}$ ein Mittel an, die rithmen der Zahlen durch bloße wiederholte Ausziehun Quadratwurzel, und eine einfache Multiplikation zu nen. Wenn man nämlich die Zahl n, welche nach ihr sprünglichen Bedeutung unendlich groß seyn sollte, ei hohe Potenz von 2 seyn läßt, also daß n = 2^m und große Zahl ist, so wird man den Log. u näherungswe halten, wenn man mmal nach einander aus u die Qu wurzel ziehet, das Resultat um 1 vermindert, und d berrest mit Mn, oder wenn von natürlichen Logarithm Rede ist, mit n, d. i. mit 2^m multiplicirt. Dieser M bediente sich Brigg in seiner im Jahre 1624 herau benen Arithmetica Logarithmica, woselbst er z. B. d garithmen von 2 also berechnete:

K

Da $\frac{2^{10}}{1000} = 1{,}024$, so ist 10 Log. 2 — Log. 1000 = Log. 1,024. Da nun Log. 1000 = 3, so wird man also den Log. 2 finden können, wenn Log. 1,024 bekannt ist. Diß ist also anstatt 2, die Zahl u, von welcher vermittelst der Formel Log. u = Mn $\{\sqrt[n]{u} - 1\}$ der Logarithme gesucht wird, welchen Umweg Brigg deswegen wählte, weil es ihm leichter schien, aus 1,024 die Quadratwurzel wiederholt zu ziehen, als aus 2. Zieht man nun wirklich 47mal nach einander aus 1,024 die Quadratwurzel, so ist dieselbe

$$= 1{,}00000000000000001685160570539497 7.$$

Diese Zahl um eine Einheit vermindert, ist

$$0{,}00000000000000001685160570539497 7.$$

Multiplicirt man diesen Unterschied zuerst mit M, oder A (§. 61.) dessen Werth wir für die briggischen, oder Tafellogarithmen

$$= 0{,}43429448190325182765112 89$$

gefunden haben, so erhält man:

$$0{,}00000000000000000731855936906239368;$$

Diese Zahl abermal mit $n = 2^{47} = 140737488355328$ multiplicirt, giebt das Produkt

$$0{,}01029995663981105265277 44$$

welches demnach der briggische Logarithme von 1,024 ist. Folglich ist:

$$10 \text{ Log. } 2 - \text{Log. } 1000 = 0{,}010299956639811 9....$$

und mithin

$$\text{Log. } 2 = \frac{3,0102999566398119\ldots}{10}$$

oder

$$\text{Log. } 2 = 0,30102999566398119\ldots$$

wofür in den Tafeln Log. 2 = 0,3010300 stehet

Den Logarithmen von 3 findet **Brigg** auf ähnliche Art also:

Es ist $\frac{6^9}{10^7} = 1,0077696$. Indem er nun $n = 2^{46}$ setzt, und aus 1,0077696, die Quadratwurzel 46mal nach einander ziehet, im übrigen aber wie oben verfährt, erhält er

Log. 1,0077696 = 0,00336125345279269. Da nun

$\frac{6^9}{10^7} = 1,0077696$, so ist

$$9 \text{ Log. } 6 - 7 \text{ Log. } 10 = \text{Log. } 1,0077696 = 0,0033612534\ldots$$

mithin

$$\text{Log. } 6 = \frac{7,0033612534\ldots}{9}$$

$$= 0,778151250383643\ldots$$

Aber

$$\text{Log. } 6 = \text{Log. } 2.3 = \text{Log. } 2 + \text{Log. } 3;$$

daher ist

$$\text{Log. } 3 = 0,477121254719662244\ldots$$

wofür in den Tafeln 0,4771213 stehet.

§. 140.

Eine andere wichtige Reihe, die aus Combinirung der Ausdrücke $u = \{1 + k\}^n$, und $v = Mnk$ entspringt, ist folgende:

welche Reihe sich, wegen n = ∞ in

$$u = 1 + n\,k + \frac{n^2}{1.2}k^2 + \frac{n^3}{1.2.3}k^3 + \frac{n^4}{1.2.3.4}k^4$$

verwandelt. Da aber $nk = \frac{v}{M}$, so ist

$$u = 1 + \frac{v}{M} + \frac{v^2}{1.2M^2} + \frac{v^3}{1.2.3M^3} + \text{etc.},$$

oder

$$u = 1 + \frac{\text{Log. } u}{M} + \frac{\{\text{Log. } u\}^2}{1.2M^2} + \frac{\{\text{Log. } u\}^3}{1.2.3M^3} + \text{etc.}$$

wo M der Model des logarithmischen Systems ist. Dah

$$u = 1 + \text{Log. nat. } u + \frac{\{\text{Log. nat. } u\}^2}{1.2} + \frac{\{\text{Log. nat. } u\}^3}{1.2.3}$$

Durch Hülfe dieser Reihe läßt sich diejenige Zahl, natürlicher Logarithme = 1 ist, leicht finden. Si nämlich

$$u = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.} = 2{,}71828$$

und wurde oben §. 133. e genannt, woselbst sie auf ei ganz verschiedenen Wege gefunden worden ist.

§. 141.

Noch eine Betrachtung, die hieher gehört, ist folgende:

$$\text{Log.}\,y = A\left\{y - 1 - \left\{\frac{\quad}{2}\right\} + \left\{\frac{\quad}{3}\right\} - \text{ꝛc.}\right\}$$

Nun setze man ferner $y = \sqrt[m]{p}$, so ist

$$\text{Log.}\,\sqrt[m]{p}, \text{ oder } \tfrac{1}{m}\,\text{Log.}\,p = A\left\{\{\sqrt[m]{p}\} - 1 - \left\{\frac{\sqrt[m]{p} -}{2}\right.\right.$$

$$+ \left\{\frac{\sqrt[m]{p} - 1}{3}\right\}^3 - \text{ꝛc.}\Big\}$$

und

$$\text{Log.}\,p = mA\left\{\sqrt[m]{p} - 1 - \left\{\frac{\sqrt[m]{p} - 1}{2}\right\}^2 + \text{ꝛ}\right.$$

Dieser Ausdruck ist für jeden Werth von m richtig, f
auch für sehr große m. Es mag nun also auch p eine
so große Zahl bedeuten, so läßt sich immer ein solches m
annehmen, daß $\sqrt[m]{p}$ so wenig von der Einheit verschied
als man will, und das Quadrat dieser Größe, und
viel mehr die höheren Potenzen derselben können geg
erste Potenz als Nullen angesehen werden. In diesem
ist also, wie wir §. 139 fanden, Log. $p = Am\{\sqrt[m]{p}$-
und das vernachläsigte zweite Glied $\left\{\frac{\sqrt[m]{p} - 1}{2}\right\}^2$ di
beurtheilen, auf wie viele Decimalstellen der Ausdruck L
$= Am\{\sqrt[m]{p} - 1\}$ richtig ist.

Stuttgart, gedruckt mit Cotta'schen Schriften.

A. Von den geometrischen Progressionen, §. 7–15. 4 –
B. Von den arithmetisch. Progression. §. 16–19. 10 –
C. Verbindung von geometrischen und arithmetischen Progressionen, §. 20–22. 12 –
D. Von den gewöhnlichen oder Briggischen Logarithmen, den aus denselben verfertigten Tabellen, rc. §. 23–32. 15 –
E. Eigenschaften der Logarithmen, §. 33–52. 31 –
F. Von den Logarithmen der Brüche, §. 53–57. 43 –
G. Ausdrücke der Logarithmen durch Reihen, §. 58 – 66. 47 –
H. Einige wichtige Sätze und Bemerkungen über die Logarithmen, §. 67–78. 60 –
I. Anwendung der Logarithmen:
1) auf Beispiele der gemeinen Rechenkunst, 2) auf die Erhebung in Potenzen, 3) auf die Ausziehung der Wurzeln, 4) auf die Berechnung der Zeitrenten, §. 79–125. 72 –
K. Einige Bemerkungen über die Zunahme der Bevölkerung, §. 126–129. 123 –
L. Von den natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen, 130–134. 127 –
M. Von den logarithmischen Differenzialen und Integralen, §. 135–141. 130 –

S.	Z.	anstatt	lese:
7	3	mit den Uebrigen	mit den übrigen
8	24	um so wichtiger.	um so richtiger
9	1	den Gränzen	den Ganzen
15	20	müßten	mußten
16	6	daß in geometrischer	daß in der geometrisch[e]
16	24	noch aus den, dieser	Noch aus den diesen
17	21	57302684 . .	5,7302684
18	4	von jener . .	von jenen
19	6	Beståude håtte	bestanden håtte
21	7, 8	4,0000000 638	4,0000000 738
25	7	hieraus . . .	hier aus
25	18	Kolumnen . .	Kolumne
36	13	so ist $\sqrt{1} : A$	$1 : A$
36	19	Log. A + B .	Log. A + Log. B
37	16	als ihm . . .	als ihre
40	20	ieselben . . .	dieselben
42	17	daß Log. $a^p = b^q$	daß Log. a^p Log.
43	5	der vorhergehende	der vorhergehende S[a]
43	9	aus einerr . .	aus einer
43	8	§. 52. Zusatz.	§. 52. Satz.
45	11	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$
47	4	Ausdruks $0,2593^{\text{Log. Log. } 11,345}$ angeben. .	$\{0,2593\}^{\text{Log. Log. } 11,345}$ angeben?
47	6	Wenn man sich ꝛc.	§. 58. Wenn man [s]

$$-\left\{\frac{\ }{161}+\frac{\ }{3.161^3}+\frac{\ }{5.161^5}\cdots\right\}$$

61	3	$\{x+m\}-x$ rc. .	$\{x+m\}-\text{Log. } x$ rc.
61	14	$\{n+x\}-x=m:n$	$\{n+x\}-\text{Log. } x=$
61	16	$\frac{m^2}{x^2}\ \frac{1}{1000000}$	$\frac{m^2}{x^2}=\frac{1}{1000000}$
64	30	$\left\{\frac{\text{Log. R}-\text{Log. P}}{10}\right\}q$	$q\left\{\frac{\text{Log. R}-\text{Log. P}}{10}\right.$
67	15 & seq.	$\left\{\frac{\text{Log. R}-\text{Log. P}}{10}\right\}q$, et $\left\{\frac{\text{Log. R}-\text{Log. P}}{10}\right\}r$	$q\left\{\frac{\text{Log. R}-\text{Log}}{10}\right.$ $r\left\{\frac{\text{Log. R}-\text{Log. P}}{10}\right\}$
68	20	ihren Faktoren .	ihrer Faktoren . .
70	7	§. 75. Lehrsatz.	§. 75. Lehnsatz.
70	21	Wo der obern Reihe jede mit 1 anfangende arithmetischen, der untere aber rc.	Wo die obere Reihe jede 1 anfangende geom sche, die untere aber
92	10	$\text{L. } \frac{892,3-\text{Log. } 286}{20}$	$\frac{\text{Log. } 892,3-\text{Log. } 28}{20}$
96	6	$\{\sqrt[n]{}\}-1$ . .	$\{\sqrt[n]{r}\}-1$
124	11	$\text{Cr}\{r-\}$ . .	$\text{Cr}\{r-1\}$
126	13	$\text{L.}\left\{1+\frac{1}{p}\right\}0{,}005511$	$\text{L.}\left\{1+\frac{1}{p}\right\}=0{,}00255$
128	16	$\frac{1+x}{1-x}$ . . .	$\text{Log.}\left\{\frac{x+x}{x-x}\right\}$

de la

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kausler, Christoph Friedrich,

Die wichtige Lehre von den Logarithmen und ihrem Gebrauch

Tübingen 1808

Math.p. 251 e
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082120-4